

# (2+1)维Kadomtsev-Petviashvili方程的 留数对称及其相互作用解

葛楠楠, 任晓静

(西北大学数学学院, 陕西 西安 710127)

**摘要:** 运用Painlevé截断展开方法得到(2+1)维Kadomtsev-Petviashvili(KP)方程的非局域留数对称和Bäcklund变换. 由于非局域对称不能直接对(2+1)维KP方程进行约化求解, 因此, 需要将非局域对称局域化. 然后, 利用相容的Riccati展开(CRE)可解的概念证明(2+1)维KP方程的CRE可解性, 从而求出(2+1)维KP方程的新的相互作用解.

**关键词:** (2+1)维KP方程; 留数对称; Painlevé截断展开; CRE可解; 相互作用解

**中图分类号:** O175.14

**AMS(2000)主题分类:** 35C08

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1001-9847(2019)04-0778-07

## 1. 引言

非线性演化方程及其精确解在物理、自然科学等领域有着极其重要的作用. 在过去的几十年里, 数学和物理领域在该方面取得了极大的进步. 我们知道, 对称群理论和Painlevé分析理论是发现和解决非线性演化方程的两大重要方法. 在可积系统中, 目前获取非局域对称的方法主要有递推算子法、逆递推算子法、Darboux变换法、Bäcklund变换法、截断的Painlevé分析方法、Möbius变换法等<sup>[1-4]</sup>. 许多方程的相互作用解可以由非局域对称得到. 最近, 楼森岳教授发现在做非局域对称的Painlevé截断展开时发现, 奇异流形的留数是一个非局域对称, 称之为留数对称. 而且, 楼森岳教授通过Painlevé截断展开方法提出了相容的Riccati展式方法(CRE), 该方法可以用来证明方程的CRE可解性, 并根据此性质构造方程的新的相互作用解. 尽管并不是所有的可积系统都是CRE可解的, 但是所有的CRE可解方程都是可积的. CRE方法可以用于求解Kadomtsev-Petviashvili(KP)方程、sine-Gordon方程、Korteweg-de Vries(KdV)方程、非线性Schrödinger方程等<sup>[5-17]</sup>.

本文主要研究(2+1)维Kadomtsev-Petviashvili(KP)方程

$$(u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + \gamma u_{yy} = 0 \quad (1.1)$$

的非局域留数对称和CRE可解性及CTE可解性, 并根据此性质构造(2+1)维KP方程的新的相互作用解.

## 2. 非局域留数对称及其局域化

(2+1)维KP方程的Painlevé截断展开式可表示为如下的形式:

$$u = u_0 + \frac{u_1}{\phi} + \frac{u_2}{\phi^2}. \quad (2.1)$$

\* 收稿日期: 2018-09-05

基金项目: 国家自然科学基金(11775047)

作者简介: 葛楠楠, 女, 汉族, 安徽人, 研究方向: 偏微分方程.

把表达式(2.1)代入方程(1.1), 然后令 $\frac{1}{\phi}$ 的各次幂为零, 可解出

$$u_0 = -\frac{\phi_x \phi_t + \gamma \phi_y^2 + 4\phi_x \phi_{xxx} - 3\phi_{xx}^2}{6\phi_x^2}, u_1 = 2\phi_{xx}, u_2 = -2\phi_x^2, \quad (2.2)$$

则

$$u = -\frac{\phi_x \phi_t + \gamma \phi_y^2 + 4\phi_x \phi_{xxx} - 3\phi_{xx}^2}{6\phi_x^2} + \frac{2\phi_{xx}}{\phi} - \frac{2\phi_x^2}{\phi^2}. \quad (2.3)$$

同时 $\phi$ 满足下面的Schwarzian形式:

$$(C + S + \frac{\gamma}{2}K^2)_x + \gamma K_y = 0, \quad (2.4)$$

$$C = \frac{\phi_t}{\phi_x}, S = \frac{\phi_{xxx}}{\phi_x} - \frac{3\phi_{xx}^2}{2\phi_x^2}, K = \frac{\phi_y}{\phi_x}.$$

Schwarzian形式在下面的Möbius变换

$$\phi \rightarrow \frac{a\phi + b}{c\phi + d} (ad \neq bc)$$

下保持不变, 即方程(2.4)容许三个对称 $\sigma^\phi = d_1, \sigma^\phi = d_2\phi, \sigma^\phi = d_3\phi^2$ , 其中 $d_1, d_2, d_3$ 是任意常数. 将表达式(2.1)代入方程(1.1)我们将得到下面的Bäcklund变换定理.

**定理1**(Bäcklund变换定理) 如果 $\phi$ 满足方程(2.4), 则

$$u = -\frac{\phi_x \phi_t + \gamma \phi_y^2 + 4\phi_x \phi_{xxx} - 3\phi_{xx}^2}{6\phi_x^2} \quad (2.5)$$

是方程(1.1)关于 $\phi$ 和解 $u$ 间的一个Bäcklund变换, 当 $\phi$ 和 $u$ 满足Bäcklund变换(2.5)时, (2+1)维KP方程(1.1)有如下的留数对称

$$\sigma^u = 2\phi_{xx}. \quad (2.6)$$

**证** 将方程(2.5), (2.6)代入下面的表达式中

$$\sigma_{tx}^u + \sigma_{xxxx}^u + 12\sigma_x^u u_x + 6\sigma_x^u u_{xx} + 6u\sigma_{xx}^u + \gamma\sigma_{yy}^u = 0. \quad (2.7)$$

利用表达式(2.4)可以验证表达式(2.7)两端恒成立, 而表达式(2.7)正好是方程(1.1)的对称方程, 因此定理1得证.

由于非局域对称不能直接进行对称约化, 因此需要将非局域对称局域化. 为了寻求非局域留数对称的有限对称形式, 我们需要解决下面的初值问题:

$$\frac{d\hat{u}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 2\hat{\phi}_{xx}, \hat{u}(0) = u, \quad (2.8)$$

其中 $\varepsilon$ 是群参数. 受到函数 $\hat{\phi}(\varepsilon)$ 及其导数的干扰, 我们很难去解决初值问题(2.8), 因此我们需要去延拓原方程使得非局域留数对称被转化为延拓的Lie点对称. 通过引入新的变量 $g$ 和 $h$ , 利用表达式

$$g = \phi_x, h = g_x. \quad (2.9)$$

方程(1.1)的非局域留数对称可被延拓为如下的Lie点对称:

$$\sigma^u = 2\phi_{xx}, \sigma^\phi = -\phi^2, \sigma^g = -2g\phi, \sigma^h = -2(g^2 + \phi h). \quad (2.10)$$

Lie点对称的向量场表示如下:

$$V = 2h\partial u - 2\phi g\partial g - 2(g^2 + \phi h)\partial h - \phi^2\partial\phi. \quad (2.11)$$

相应的初值问题(2.8)变成如下的初值问题

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \hat{g}_x(\varepsilon), \hat{u}(0) = u, \\ \frac{d\hat{g}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = -2\hat{\phi}(\varepsilon)\hat{g}(\varepsilon), \hat{g}(0) = g, \\ \frac{d\hat{\phi}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = -\hat{\phi}(\varepsilon)^2, \hat{\phi}(0) = \phi, \\ \frac{d\hat{h}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = -2(\hat{g}(\varepsilon)^2 + \hat{\phi}(\varepsilon)\hat{g}(\varepsilon)), \hat{h}(0) = h. \end{cases} \quad (2.12)$$

解上面的初值问题我们很容易得到下面的对称群变换定理.

**定理2** 若 $\{u, g, h, \phi\}$ 是延拓系统(1.1), (2.4)和(2.9)的解, 则 $\{\hat{u}, \hat{g}, \hat{h}, \hat{\phi}\}$ 也是他们的解, 其中

$$\begin{cases} \hat{u}(\varepsilon) = u + \frac{2h\varepsilon}{1+\phi\varepsilon}, \\ \hat{g}(\varepsilon) = \frac{g}{(1+\phi\varepsilon)^2}, \\ \hat{\phi}(\varepsilon) = \frac{\phi}{1+\phi\varepsilon}, \\ \hat{h}(\varepsilon) = \frac{h}{(1+\phi\varepsilon)^2} - \frac{2g^2\varepsilon}{(1+\phi\varepsilon)^3}. \end{cases} \quad (2.13)$$

**注1** 通过定理2可知, 从截断的Painlevé表达式得出的留数对称 $\sigma^u = 2\phi_{xx}$ 正好是群(2.13)的无穷小形式. 因为奇异流形系统(1.1), (2.4)和(2.9) 在变换

$$1 + \varepsilon\phi = \phi, \varepsilon g = \phi_x, \varepsilon h = \phi_{xx} \quad (2.14)$$

下是保持不变的, 因此上面的群变换实际上等价于将表达式(2.2)代入(2.1)后的截断Painlevé展开式.

### 3. CRE可解和新的精确解

根据CRE方法, 方程(1.1)有如下的截断展开形式:

$$u = u_0 + \frac{u_1}{R(\omega)} + \frac{u_2}{R^2(\omega)}, \quad (3.1)$$

其中 $\omega = \omega(x, y, t)$ ,  $R(\omega)$ 是Riccati方程

$$R_\omega = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 \quad (3.2)$$

的解,  $a_0, a_1, a_2$ 是任意常数,  $\gamma = 3$ . 将表达式(3.1)和(3.2)代入方程(1.1), 令 $R(\omega)$ 的各次幂前面的系数为零, 可解出

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{\omega_t}{6\omega_x} + a_1\omega_{xx} - \frac{1}{6}(a_1^2 + 8a_0a_2)\omega_x^2 - \frac{2\omega_{xxx}}{3\omega_x} + \frac{\omega_{xx}^2}{2\omega_x^2} - \frac{\omega_y^2}{2\omega_x^2}, \\ u_1 = -2a_0(a_1\omega_x^2 + \omega_{xx}), \\ u_2 = -2a_0^2\omega_x^2. \end{cases} \quad (3.3)$$

同时函数 $\omega$ 满足下面的方程

$$(C + S - \frac{\delta}{2}\omega_x^2 + \frac{3}{2}K^2)_x + 3K_y = 0, \quad (3.4)$$

其中

$$C = \frac{\omega_t}{\omega_x}, S = \frac{\omega_{xxx}}{\omega_x} - \frac{3\omega_{xx}^2}{2\omega_x^2}, K = \frac{\omega_y}{\omega_x}, \delta = a_1^2 - 4a_0a_2. \quad (3.5)$$

根据CRE可解的定义可知, (2+1)维KP方程是CRE可解的. 我们知道, 当 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1$ 时Riccati方程(3.2)有一个特解

$$R(\omega) = \tanh(\omega). \quad (3.6)$$

此时, 我们称CRE可解为CTE可解. 显然, 一个CRE可解系统一定是CTE可解的, 反之亦然. 此时, 截断展开式(3.1)变为

$$u = u_0 + \frac{u_1}{\tanh(\omega)} + \frac{u_2}{\tanh^2(\omega)}, \quad (3.7)$$

其中 $u_0, u_1, u_2$ 和 $\omega$ 由式(3.3)和(3.4)确定. 因此有

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{\omega_t}{6\omega_x} + \frac{4}{3}\omega_x^2 - \frac{2\omega_{xxx}}{3\omega_x} + \frac{\omega_{xx}^2}{2\omega_x^2} - \frac{\omega_y^2}{2\omega_x^2}, \\ u_1 = 2\omega_{xx}, \\ u_2 = -2\omega_x^2. \end{cases} \quad (3.8)$$

此时函数 $\omega$ 满足下面的方程

$$(C + S - 2\omega_x^2 + \frac{3}{2}K^2)_x + 3K_y = 0, \quad (3.9)$$

其中

$$C = \frac{\omega_t}{\omega_x}, S = \frac{\omega_{xxx}}{\omega_x} - \frac{3\omega_{xx}^2}{2\omega_x^2}, K = \frac{\omega_y}{\omega_x}. \quad (3.10)$$

我们将得到如下的CTE可解定理.

**定理3** 当 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1$ 时,(2+1)维KP方程是CTE可解的, 相容的tanh展式如下

$$u = \frac{-\omega_x \omega_t - 3\omega_y^2 - 4\omega_x \omega_{xxx} - 8\omega_x^4 + 3\omega_{xx}^2}{6\omega_x^2} + \frac{2\omega_{xx}}{\tanh(\omega)} - \frac{2\omega_x^2}{\tanh^2(\omega)}. \quad (3.11)$$

方程(1.1)的单孤子解是(3.9)式的直线解, 由于(2+1)维KP方程(1.1)的CRE及CTE可解性, 根据文[3], 关于 $\omega$ 的方程(3.9)的解刻画了方程(1.1)孤立子和其他非线性激发模式的相互作用解, 其一般形式为

$$\omega = k_1 x + l_1 y + p_1 t + W(X), X = k_2 x + l_2 y + p_2 t. \quad (3.12)$$

把(3.12)代入(3.9)得到满足下面的椭圆函数方程

$$W_{1X}^2 = C_0 + C_1 W_1 + C_2 W_1^2 + C_3 W_1^3 + C_4 W_1^4, \quad (3.13)$$

其中

$$\begin{cases} W_1(X) = W_X, \\ C_0 = \frac{C_3 k_1^3 k_2^3 - 8k_1^4 k_2^2 - k_1^2 k_2 p_2 - 5k_1^2 l_2^2 + k_1 p_1 k_2^2 + 4k_1 k_2 l_1 l_2 + k_2^2 l_1^2}{k_2^6}, \\ C_1 = \frac{3C_3 k_1^2 k_2^3 - 24k_1^3 k_2^2 - k_1 p_2 p_2 - 6k_1 l_2^2 + p_1 k_2^2 + 6k_2 l_1 l_2}{k_2^5}, \\ C_2 = \frac{k_1(3C_3 k_2 - 20k_1)}{k_2^2}, C_3 = C_3, C_4 = 4. \end{cases} \quad (3.14)$$

则(2+1)维KP方程有如下形式的解

$$\begin{aligned} u = & \frac{-(k_1 + k_2 W_1)(p_1 + p_2 W_t) - 3(l_1 + l_2 W_y)^2 - 4(k_1 + k_2 W_1)k_1^3 W_{1XX}}{6(k_1 + k_2 W_1)^2} \\ & + \frac{3k_2^2 W_{1X}^2 - 8(k_1 + k_2 W_1)^4}{6(k_1 + k_2 W_1)^2} + \frac{2k_2^2 W_{1X}}{\tanh(k_1 x + l_1 y + p_1 t + W(X))} \\ & - \frac{2(k_1 + k_2 W_1)^2}{\tanh^2(k_1 x + l_1 y + p_1 t + W(X))}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

接下来我们将讨论两种特殊类型的相互作用解.

**例1** 显然, 方程(3.13)的一般解可以表示为雅可比椭圆函数. 我们取 $\omega$ 为如下特殊形式的雅可比椭圆函数

$$\omega = k_1 x + l_1 y + p_1 t + \lambda E_\pi(\text{sn}(k_2 x + l_2 y + p_2 t, m), n, m). \quad (3.16)$$

作为方程(3.9)的解, 表达式(3.15)刻画了方程(1.1)的孤立子与椭圆周期波的相互作用解, 其中 $\text{sn}(q, m)$ 为一般的雅可比椭圆sine函数,  $E_\pi$ 是第三类不完全积分. 把(3.16)代入(3.11), 利用符号计算软件maple, 我们得到方程(1.1)的孤立子与椭圆周期波的相互作用解

$$\begin{aligned} u = & \frac{-2\left(k_1 + \frac{\lambda k_2}{1-nS^2}\right)^2}{\tanh(w)^2} + \frac{4\lambda n k_2^2 S C D}{(1-nS^2)\tanh(w)} + \frac{4}{3}\left(k_1 + \frac{\lambda k_2}{1-nS^2}\right) - \frac{\left(l_1 + \frac{\lambda l_2}{1-nS^2}\right)^2}{2\left(k_1 + \frac{\lambda k_2}{1-nS^2}\right)^2} \\ & - \frac{2}{3\left(k_1 + \frac{\lambda k_2}{1-nS^2}\right)} \left( \frac{8\lambda n^2 k_2^3 S^2 C^2 D^2}{(1-nS^2)^3} + \frac{2n\lambda k_2^3 C^2 D^2}{(1-nS^2)^2} + \frac{2n\lambda k_2^3 S^2 D^2}{(1-nS^2)^2} \right) \end{aligned}$$

$$-\frac{2m^2n\lambda k_2^3 C^2 S^2}{(1-nS^2)^2} - \frac{\left(p_1 + \frac{\lambda p_2}{1-nS^2}\right)}{6\left(k_1 + \frac{\lambda k_2}{1-nS^2}\right)^2} + \frac{2\lambda^2 n^2 k_2^4 S^2 C^2 D^2}{(1-nS^2)^4 \left(k_1 + \frac{\lambda k_2}{1-nS^2}\right)^2},$$

其中  $\{k_1, l_1, p_1, k_2, l_2, m, n\}$  为任意常数,

$$S = \text{sn}(k_2x + l_2y + p_2t), \quad C = \text{cn}(k_2x + l_2y + p_2t), \quad D = \text{dn}(k_2x + l_2y + p_2t),$$

$$\lambda = \frac{4m^2nk_1^2k_2^4 - 12m^2k_1^2k_2^4 + 4nk_1^4k_2^2 + 4nk_1^2k_2^4 - nk_1^2k_2p_2 - 3nk_1^2l_2^2 + nk_1k_2^2p_1 - 2nk_1k_2l_1l_2 + 3nk_2^2l_1^2}{8m^2k_1k_2^5},$$

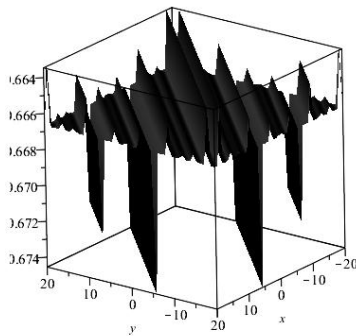
$$p_2 = \frac{4m^2nk_1^2k_2^4 - 12m^2k_1^2k_2^4 + 4nk_1^4k_2^2 + 4nk_1^2k_2^4 - 3nk_1^2l_2^2 + nk_1k_2^2p_1 - 2nk_1k_2l_1l_2 + 3nk_2^2l_1^2}{nk_1^2k_2}.$$

图(a1)描述的是当  $t = 0$  时的方程的孤立子与椭圆周期波之间的相互作用解; 图(a2)描述的是当  $x = 0, y = 0$  时  $u$  的平面周期波结构. 其中参数选择如下:

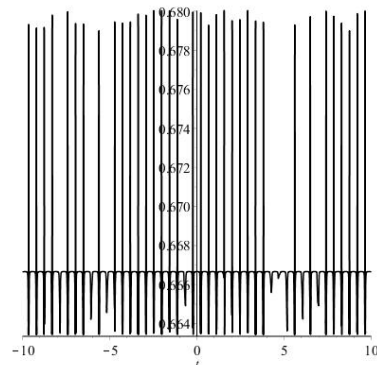
$$\{m = 0.01, n = 0.99, k_1 = 1, k_2 = 1, p_1 = 1, l_1 = 1, l_2 = 1\}.$$

图(b1)描述的是当  $t = 0$  时的方程的孤立子与椭圆周期波之间的相互作用解; 图(b2)描述的是当  $x = 0, y = 0$  时  $u$  的平面周期波结构. 其中参数选择如下:

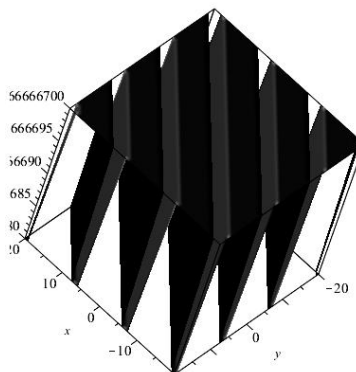
$$\{m = 0.99, n = 0.01, k_1 = 1, k_2 = 1, p_1 = 1, l_1 = 1, l_2 = 1\}.$$



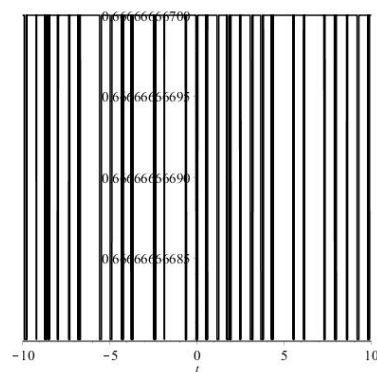
图(a1)



图(a2)



图(b1)



图(b2)

观察这些相互作用解的图形可以发现, 在  $t = 0$  时, 对于不同的参数, 方程的相互作用解不同, 这些解具有多个不在同一平面上的波峰和波谷, 且这些波峰和波谷的凹陷程度不同.

**例2** 取  $W(X) = \frac{1}{2} \arctan h[\text{sn}(mX, n)]$ , 按照与例1类似的步骤可得方程(1.1)的相互作用解

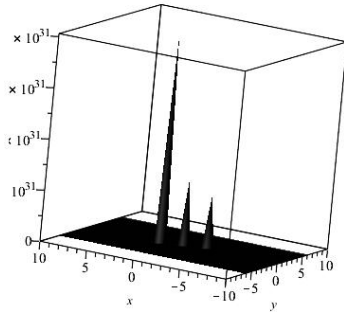
$$\begin{aligned}
u = & \frac{-2 \left( k_1 + \frac{1}{2} \frac{mk_2CD}{1-S^2} \right)^2}{\tanh(k_1x + l_1y + p_1t + \frac{1}{2} \arctan h(S))^2} + \frac{2m^2k_2^2SC^2D^2 - m^2k_2^2S(n^2C^2 + D^2)(1-S^2)}{(1-S^2)^2 \tanh(k_1x + l_1y + p_1t + \frac{1}{2} \arctan h(S))} \\
& + \frac{4}{3} \left( k_1 + \frac{1}{2} \frac{mk_2CD}{1-S^2} \right)^2 - \frac{\left( l_1 + \frac{1}{2} \frac{ml_2CD}{1-S^2} \right)^2}{2 \left( k_1 + \frac{1}{2} \frac{mk_2CD}{1-S^2} \right)^2} - \frac{2}{3 \left( k_1 + \frac{1}{2} \frac{mk_2CD}{1-S^2} \right)} \left( \frac{4m^3n^2k_2^3S^2C^3D^3}{(1-S^2)^3} \right. \\
& + \frac{m^3k_2^3C^3D^3}{(1-S^2)^2} - \frac{3m^3n^2k_2^3CD(n^2C + S^2D^2)}{(1-S^2)^2} - \frac{m^3k_2^3CD(4n^2S^2 - D^2 - n^2C^2)}{(1-S^2)^2} \left. \right) \\
& - \frac{\left( p_1 + \frac{1}{2} \frac{mp_2CD}{1-S^2} \right)}{6 \left( k_1 + \frac{1}{2} \frac{mk_2CD}{1-S^2} \right)} - 3 \left( \frac{m^2k_2^2(2SC^2D^2 - SD^2 - n^2SC^2)}{2(1-S^2)^2} \right),
\end{aligned}$$

其中  $\{k_1, l_1, p_1, l_2, p_2, m\}$  为任意常数,

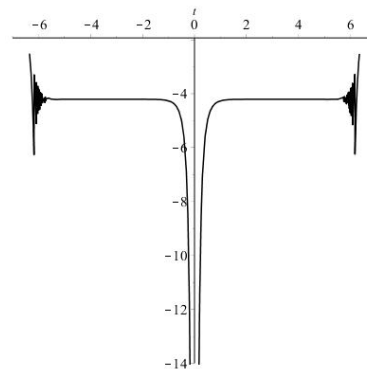
$$S = \operatorname{sn}(mX, n), C = \operatorname{cn}(mX, n), D = \operatorname{dn}(mX, n), X = k_2x + l_2y + p_2t.$$

图(c1)描述的是当  $t = 0$  时方程(1.1)的孤立波与椭圆周期波间的相互作用解; 图(c2)描述的是当  $x = 0, y = 0$  时  $u$  的平面周期波结构. 其中参数选择如下:

$$\{m = 3, n = 1, k_1 = 1, k_2 = 0, l_1 = 1, l_2 = 1, p_1 = 1, p_2 = 1\}.$$



图(c1)



图(c2)

#### 4. 结束语

运用Painlevé截断展开方法, 我们可以获得(2+1)维KP方程的非局域留数对称和Bäcklund变换定理. 接着, 我们将非局域留数对称局域化为(2+1)维KP方程的Lie点对称. 利用Lie的第一基本定理研究了封闭系统的有限变换. 由于(2+1)维KP方程具有CRE可解性, 因此, CRE的一个特殊形式CTE方法被用于(2+1)维KP方程的求解. 借助于CTE方法我们得到了(2+1)维KP方程的新的相互作用解, 为了更好的研究解的性质, 通过选取适当的参数, 画出了上述解相应的图形. 通过解的图形可以很好的描述(2+1)维KP方程的相互作用解以及波峰、波谷的形状.

#### 参考文献:

- [1] OLVER P J. Applications of the Lie Groups to Differential Equations[M]. Berlin: Springer, 1986.
- [2] LOU Senyue. Residual symmetries and Bäcklund transformations[EB/OL]. 2013, arXiv: 1308.1140v1.
- [3] LOU Senyue. Consistent Riccati expansion for integrable system[J]. Stud. Appl. Math., 2015, 134: 372-402.

- [4] WESSI J, TABOR M, CARNEVALE G. Painlevé property for partial differential equation [J]. *Math. Phys.*, 1983, 24(3): 522-526.
- [5] YANG Duo, LOU Senyue, YU W F. Interaction between solitons and cnoidal periodic waves of the Boussinesq equation[J]. *Commun. Theor. Phys.*, 2013, 60: 387-390.
- [6] WU Jianwen, LOU Senyue, YU Jun. Localization of nonlocal symmetries and symmetry reductions of Burgers equation[J]. *Commun. Theor. Phys.*, 2017, 67: 467-472.
- [7] CHENG Wenguang, LI Biao. Residual symmetry and explicit soliton-cnoidal wave interaction solutions of the (2+1)-dimensional KdV-mKdV equation[J]. *Z. Naturforsch.*, 2016, 71(4): 351-356.
- [8] LIU Xizhong, YU Jun, LOU Zhimei. New Bäcklund transformations of the (2+1)-dimensional Burgers system related to residual symmetry[J]. *Eur. Phys. J. Plus*, 2018, 133: 89.
- [9] XIA Yarong, XIN Xiangpeng, ZHANG Shunli. Residual symmetry, interaction solutions, and conservation laws of the (2+1)-dimensional dispersive long-wave system[J]. *Chin. Phys. B*, 2017, 26(3): 030202.
- [10] HU Xiaorui, CHEN Yong. Nonlocal symmetries, consistent Riccati expansion integrability, and their applications of the (2+1)-dimensional Broer-Kaup-Kupershmidt system[J]. *Chin. Phys. B*, 2015, 24(9): 090203.
- [11] CHEN Chunli, LOU Senyue. CTE solvability, nonlocal symmetry and exact solutions of dispersive water wave system[J]. *Commun. Theor. Phys.*, 2014, 61(5): 545-550.
- [12] MA Zhengyi, FEI Jinxi, DU Xiaoyang. Symmetry reduction of (2+1)-dimensional modified dispersive water-wave[J]. *Commun. Theor. Phys.*, 2015, 64(2): 127-132.
- [13] REN Bo, CHENG Xueping. CTE solvability, nonlocal symmetry and explicit solution of modified Boussinesq equations[J]. *Commun. Theor. Phys.*, 2016, 66(1): 84-92.
- [14] LOU Senyue, HU Xingbiao. Infinitely many lax pair and symmetry constraints of the KP equation[J]. *Journal of Math. Phys.*, 1997, 38(12): 6401-6427.
- [15] TANG X Y, LOU S Y, ZHANG Y. Localized excitations in (2+1)-dimensional systems[J]. *Phys. Review E*, 2002, 66: 1-17.
- [16] WANG Y F, LOU S Y, QIAN X M. A new (2+1)-dimensional supersymmetric Boussinesq equation and its Lie symmetry study[J]. *Chinese Physics B*, 2010, 19(5): 6-11.
- [17] LIAN Z J, CHEN L L, LOU S Y. Painlevé property, symmetries and symmetry reductions of the coupled Burgers system[J]. *Chinese Physics B*, 2005, 14(8): 1486-1494.

## Residual Symmetry and Interaction Solution of the (2+1)-Dimensional Kadomtsev-Petviashvili Equation

*GE Nannan, REN Xiaojing*

*(School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)*

**Abstract:** The truncated Painlevé expansion method is developed to obtain the nonlocal residual symmetry and Bäcklund transformation for the (2+1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation. The nonlocal symmetry cannot directly solve the (2+1)-dimensional KP equation. It is necessary to localized the nonlocal symmetry. Then, using the solvable concept of the consistent Riccati expansion method (CRE), the (2+1)-dimensional KP equation is proved to be consistent Riccati expansion solvable, and the new interaction solution of the (2+1)-dimensional KP equation is obtained

**Key words:** (2+1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation; Residual symmetry; Truncated Painlevé expansion; Consistent Riccati expansion; Interaction solution