应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2019, 32(4): 790-795

耗散Boussinesq方程弱解的爆破

苏晓[1] , 王书彬[2], 宋瑞丽[3]
(1. 河南工业大学理学院,河南 郑州 450001; 2. 郑州大学数学与统计学院,
河南 郑州 450001; 3.中原工学院信息商务学院, 河南 郑州 450007)

摘要: 本文主要研究一类耗散Boussinesq方程的初边值问题的弱解的有限时间爆破. 我们主要研究了当初值落在位势井内时, 弱解在有限时间爆破的充分必要条件, 并给出爆破时间的下界估计. 本文是对WANG和SU(2016)的文章的一个补充.
关键词: 耗散Boussinesq方程; 初边值问题; 爆破
中图分类号: O175.29 **AMS(2000)主题分类:** 35B44; 35L35
文献标识码: A **文章编号:** 1001-9847(2019)04-0790-06

1. 引言

本文研究下列初边值问题

$$u_{tt}-\Delta u+\Delta^2 u-\gamma\Delta u_t+\beta\Delta^2 u_t+\Delta f(u)=0,\quad (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^n+ \tag{1.1}$$

$$u\mid_{\partial\Omega}=0,\qquad \Delta u\mid_{\partial\Omega}=0, \tag{1.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\qquad u_t(x,0)=u_1(x) \tag{1.3}$$

的弱解在有限时间发生爆破的充分必要条件及爆破时间的下界估计, 其中Ω是$\mathbb{R}^n$中具有光滑边界的有界区域, $\partial\Omega$是Ω的边界, $f(u)=|u|^{p-1}u$, $1<p<\infty$, $\beta\geq 0$, $\gamma>-\beta\lambda_1$, $\lambda_1>0$是$-\Delta$在Dirichlet边界条件下的第一特征值, 下标t表示对t的偏导数.

1872年Boussinesq[1]提出一类描述浅水长波的方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxxx}=(u^2)_{xx}, \tag{1.4}$$

并给出了方程(1.4)的某些特殊孤立波. 1974年Zakharov[13]提出方程(1.4)的另一种形式

$$u_{tt}-u_{xx}+u_{xxxx}=(u^2)_{xx}, \tag{1.5}$$

用来描述非线性弦振动. 方程(1.4)和(1.5)被后人称为Boussinesq(Bq)方程. Bq方程的提出第一次对Russel提出的孤立波现象[8]做出了科学的满意的解释[2]. Bq方程是经典线性波方程的扰动形式, 结合了非线性和色散的基本思想, 这也是许多水波模型的特点. 此后Bq方程得到了广泛的研究应用和推广, 从不同形式的非线性项的角度出发提出了广义Bq方程

$$u_{tt}-u_{xx}+(u_{xx}+f(u))_{xx}=0. \tag{1.6}$$

Bq方程及其广义形式的定解问题得到了广泛的研究, 并取得了丰富的研究结果, 这些结果主要集中在初值问题和初边值问题弱解和强解的整体适定性、有限时间爆破及解的长时间行为. 1988年Bona和Sachs[2]研究了方程(1.6)的初值问题. 作者使用拟线性发展方程

* **收稿日期:** 2018-09-07
基金项目: 河南工业大学博士基金(2017BS029), 河南工业大学“省属高校基本科研业务费专项资金”(2018QNJH19), 国家自然科研基金 (11801145, 11171311)
作者简介: 苏晓, 女, 汉族, 河南人, 讲师, 研究方向: 偏微分方程.

的Kato理论证明了问题的局部适定性, 并进一步证明了古典解的存在性. 1993 年Linares[4]研究了方程(1.6)的初值问题, 其中非线性项为$f(u)=|u|^\alpha u$. 通过建立相应的线性问题解的光滑效应(L^p-L^q估计或 Strichartz 估计)结合压缩映像原理讨论了低正则局部解, 通过建立能量等式进一步证明了当初值分小时$H^1(\mathbb{R})$中的局部解可延拓为整体解, 并给出了解的衰减性质. 1995年LIU[5]利用凸性方法证明了方程(1.6)孤立波解的不稳定性. 2000年LIU[6]研究了当初值落在基态解的某个小邻域内时解的有限时间爆破, 此结论是文[5]中爆破结果的一个改进.

Bq方程及广义Bq方程孤立波的存在性说明了非线性项和色散之间的平衡. 在耗散系统中没有能量守恒而是能量生成 (energy production) 和耗散之间的平衡关系. 为了描述非线性项、能量生成和耗散之间的关系, 1994年Christov和Velarde[3]提出了用来描述薄粘性液体中流动的耗散Bq方程：

$$u_{tt}=\left[\gamma^2u-\frac{\alpha}{2}u^2-\beta\gamma u_{xx}-\alpha_4u_{xxt}-\alpha_2u_t\right]_{xx}. \tag{1.7}$$

方程 (1.7)还可描述非线性弹性梁的振动[9]. 当$\alpha_4=0$时, 方程(1.7)就是阻尼Bq方程.

WANG和SU在文[11-12]中分别研究了方程(1.7)的初边值问题和初值问题, 讨论了在三种不同初始能量状态下弱解的整体适定性及弱解在有限时间爆破的充分条件, 并在文[12]中讨论了低初始能量状态下解在有限时间发生爆破的必要条件. 其中在文[11]中得到了如下结论: 若存在时间t_0使得$u(t_0)$落在位势井集合,

$$V=\left\{u\in H_0^1(\varOmega);I(u)<0,J(u)<d\right\} \tag{1.8}$$

内, 则存在时间$T_{\max}$使得问题(1.1)-(1.3)的弱解u满足

$$\lim_{t\to T_{\max}^-}\left(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|+\|u\|_{H^1}\right)=\infty, \tag{1.9}$$

其中

$$J(u)=\frac{1}{2}(\|u\|^2+\|\nabla u\|^2)-\frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$
$$I(u)=\|u\|^2+\|\nabla u\|^2-\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

$I(u)$也被称为Nehari泛函, 位势井深度d定义为

$$d=\inf\left\{\sup_{\lambda\geq0}J(\lambda u):u\in H_0^1(\varOmega),u\neq0\right\}. \tag{1.10}$$

关于位势井深度的讨论可以参看文[5, 7, 10]. 反之, 若问题(1.1)-(1.3)的弱解满足(1.9), 是否一定存在时间$t_0\geq0$使得$u(t_0)\in V$？本文将证明在非线性增长阶p满足一定条件下, 上述结论是正确的, 即给出了问题(1.1)-(1.3)的弱解在有限时间爆破的必要条件. 此外本文还给出解存在的最大时间$T_{\max}$的一个下界估计, 这些结论在文[11]中未得到讨论, 本文是对文[11]的一个补充说明.

文中将使用标准的符号：$L^p=L^p(\varOmega)$表示Lebesgue空间, $\|\cdot\|_{L^p}$表示L^p中的范数, 其中$1\leq p\leq\infty$, 为了书写方便, 用$\|\cdot\|$ 表示L^2中的范数; $H_0^1=H_0^1(\varOmega)$表示Sobolev空间, $\|\cdot\|_{L^2}+\|\nabla\cdot\|_{L^2}$与$\|\nabla\cdot\|_{L^2}$是$H_0^1$ 中的等价范数; $(\cdot,\cdot)$表示L^2中的内积.

2. 预备知识

文[11]中给出了问题(1.1)-(1.3)的局部适定性并建立了能量等式.

定理2.1　令$u_0\in H_0^1,(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_1\in L^2$, p满足

$$当\ n=1,2,\quad 1<p<\infty,\quad 当\ n\geq3,\quad 1<p\leq\begin{cases}\frac{n+2}{n-2}, & \beta>0,\\ \frac{n}{n-2}, & \beta=0.\end{cases} \tag{2.1}$$

则存在时间$T_{\max}>0$, 使得问题(1.1)-(1.3)有唯一弱解u满足

$$u\in C\left([0,T_{\max});H_0^1\right),\quad (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\in C\left([0,T_{\max});L^2\right), \tag{2.2}$$

且

$$\begin{cases} u_t \in L^2\left(0, T_{\max}; H_0^1\right), & \beta > 0, \\ u_t \in L^2\left(0, T_{\max}; L^2\right), & \beta = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

进一步有能量守恒式成立, 即

$$E(t) + \int_0^t \left(\gamma\|u_t\|^2 + \beta\|\nabla u_t\|^2\right) \mathrm{d}\tau = E(0), \tag{2.4}$$

其中

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u_t\right\|^2 + \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2\right) - \frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

另外, 如果

$$\lim_{t \to T_{\max}^-}\left(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u_t\right\| + \|u\|_{H^1}\right) < \infty, \tag{2.5}$$

则 $T_{\max} = \infty$.

定义2.1 如果$T_{\max} < \infty$, 则称问题(1.1)-(1.3)的弱解在有限时间爆破, $T_{\max}$称为爆破时间; 如果$T_{\max} = \infty$, 则称问题(1.1)-(1.3) 的弱解是整体存在的.

3. 主要结论及证明

定理3.1 令p满足(2.1) 且当$\beta = 0$, $1 \le n \le 4$时$1 < p < 1 + \frac{4}{n}$, u是问题(1.1)-(1.3)的局部解. 则$T_{\max} < \infty$当且仅当存在某一时间t_0使得$E(t_0) < d$且$u(t_0) \in V$, 其中集合V是由(1.8) 所定义.

注3.1 假设条件: $\beta = 0$, $1 \le n \le 4$时p满足$1 < p < 1 + \frac{4}{n}$, 只是必要性成立所需的条件, 充分性成立不需要对p做额外的假设, 这也可以看出阻尼项的阶数对解的行为的影响.

证 充分性的证明参看文[11]中定理2.6.

下面给出必要性的证明.

步1 我们首先证明若$T_{\max} < \infty$, 则有

$$\lim_{t \to T_{\max}^-} \|u\|_{H_0^1} = +\infty. \tag{3.1}$$

特别地, 当 $\beta = 0$时有

$$\lim_{t \to T_{\max}^-} \|u\| = +\infty. \tag{3.2}$$

事实上, 若$T_{\max} < \infty$, 由定理2.1可知

$$\lim_{t \to T_{\max}^-}\left(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u_t\right\|^2 + \|u\|_{H^1}^2\right) = +\infty.$$

由能量守恒式(2.4)可得

$$\frac{1}{2}\left(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u_t\right\|^2 + \|u\|_{H^1}^2\right) \le E(0) + \frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

由此可知

$$\lim_{t \to T_{\max}^-} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} = +\infty. \tag{3.3}$$

由p的假设条件可知$H_0^1 \hookrightarrow L^{p+1}$, 故

$$\|u\|_{L^{p+1}} \le C_*\|u\|_{H_0^1},$$

其中C_*是Sobolev最佳嵌入常数, 则(3.1)成立.

当$\beta = 0$时, 注意到$\frac{(p-1)n}{2} < 2$, 则由Gagliado-Nirenber不等式和ε-Young不等式可知

$$\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} \le C\|u\|^{\frac{2(p+1)-(p-1)n}{2}}\|\nabla u\|^{\frac{(p-1)n}{2}} \le \varepsilon\|u\|_{H_0^1}^2 + C_\varepsilon\|u\|^q,$$

其中$q=\frac{2[2(p+1)-n(p-1)]}{4-(p-1)n}>0$. 由能量等式知,

$$\|u\|_{H_0^1}^2-2E(0)\leq\frac{2}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}\leq\varepsilon\|u\|_{H_0^1}^2+C_\varepsilon\|u\|^q.$$

取$\varepsilon<1$, 由(3.1)可得(3.2).

步2　证明

$$\lim_{t\to T_{\max}^-}E(t)=-\infty. \tag{3.4}$$

注意到

$$u(t)-u_0=\int_0^t u_\tau \mathrm{d}\tau,$$

则由Hölder不等式和能量等式(2.4) 可得

$$\begin{aligned}\|u\|_{H_0^1}-\|u_0\|_{H_0^1}\leq&\|u-u_0\|_{H_0^1}\leq\int_0^t\|u_\tau\|_{H_0^1}\mathrm{d}\tau\\ \leq&t^{\frac12}\left(\int_0^t\|u_\tau\|_{H_0^1}^2\mathrm{d}\tau\right)^{\frac12}=Ct^{\frac12}\left(E(0)-E(t)\right)^{\frac12}\\ \|u\|-\|u_0\|\leq&\|u-u_0\|\leq\int_0^t\|u_\tau\|\mathrm{d}\tau\\ \leq&Ct^{\frac12}\left(\int_0^t\|u_\tau\|^2\mathrm{d}\tau\right)^{\frac12}=Ct^{\frac12}\left(E(0)-E(t)\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$

对以上两个不等式两边取极限, 令$t\to T_{\max}^-$, 并由(3.1)和(3.2)知(3.4)成立.

由$E(t)$和$I(u)$之间的关系式,

$$E(t)=\frac12\left\|(-\Delta)^{-\frac12}u_t\right\|^2+\frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_{H_0^1}+\frac{1}{p+1}I(u)\leq E(0),$$

可知

$$\lim_{t\to T_{\max}^-}I(u)=-\infty.$$

故一定存在 $t_0\in[0,T_{\max})$使得

$$J(u(t_0))<d,\quad 且\quad I(u(t_0))<0.$$

定理2.1得证.

定理3.2　令p满足(2.1). 如果问题(1.1)-(1.3)的弱解在有限时刻$T_{\max}$发生爆破, 则

$$T_{\max}\geq T,$$

当$\beta>0$时

$$T=\begin{cases}\ln(1+\frac{a}{b}H(0)^{1-p}), & n=1,2\text{ 或者 }1<p<\frac{n+2}{n-2}\\ \frac{H(0)^{1-p}}{b(p-1)}, & n\geq3\text{ 且 }p=\frac{n+2}{n-2},\end{cases} \tag{3.5}$$

当$\beta=0$时

$$T=\frac{\gamma H(0)^{1-p}}{C_*^{2p}(p-1)}, \tag{3.6}$$

其中$H(0)=\left\|(-\Delta)^{-\frac12}u_1\right\|^2+\|u_0\|^2+\|\nabla u_0\|^2$, $a=\frac{(n+2)-(n-2)p}{4(p+1)}>0$, $b=(C_1C_*^pc_*^\theta)^2>0$, $C_1>0$是Sobolev不等式常数, $c_*>0$是与γ和β有关的常数, 跟文[11]中的定义一致.

证　令

$$H(t)=\left\|(-\Delta)^{-\frac12}u_t\right\|^2+\|u\|^2+\|\nabla u\|^2.$$

则由能量等式(2.4)可知

$$H(t)+2\int_0^t \left(\gamma\|u_t\|^2+\beta\|\nabla u_t\|^2\right)\mathrm{d}\tau=2E(0)+\frac{2}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

上式两边关于t求导可得

$$H'(t)+2\left(\gamma\|u_t\|^2+\beta\|\nabla u_t\|^2\right)=2\int_\Omega |u|^{p-1}uu_t\mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

下面我们分$\beta>0$和$\beta=0$两种情况分别讨论.

情形1 当$\beta>0$时, 由假设条件(2.1), 并使用Hölder不等式和Sobolev嵌入定理可得

$$\int_\Omega |u|^{p-1}uu_t\mathrm{d}x\le \|u\|_{L^{p+1}}^p\|u_t\|_{L^{p+1}}\le C_*^p\|u\|_{H^1}^p\|u_t\|_{L^{p+1}}. \tag{3.8}$$

由插值不等式可知

$$\|u_t\|_{L^{p+1}}\le C_1\left\|(-\Delta)^{-\frac12}u_t\right\|^{1-\theta}\|\nabla u_t\|^\theta,$$

其中$0<\theta=\frac12+\frac{(p-1)n}{4(p+1)}\le 1$. 将上式带入(3.8) 并由Young不等式可得

$$\begin{aligned}&H'(t)+2\left(\gamma\|u_t\|^2+\beta\|\nabla u_t\|^2\right)\\ \le&2C_1C_*^p\|u\|_{H^1}^p\left\|(-\Delta)^{-\frac12}u_t\right\|^{1-\theta}\|\nabla u_t\|^\theta\\ \le&(C_1C_*^pc_*^\theta)^2\|u\|_{H^1}^{2p}+(1-\theta)\left\|(-\Delta)^{-\frac12}u_t\right\|^2+\theta\left(\gamma\|u_t\|^2+\beta\|\nabla u_t\|^2\right).\end{aligned}$$

当$0<\theta<1$时, 上式可化简为

$$H'(t)\le aH(t)+bH(t)^p.$$

其中 $b=(C_1C_*^pc_*^\theta)^2$, $a=1-\theta$. 解此常微分不等式得

$$H(t)\le\left(\left(\frac{b}{a}+H(0)^{1-p}\right)e^{-a(p-1)t}-\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{3.9}$$

当$\theta=1$, 即$n\ge3$且$p=\frac{n+2}{n-2}$时$H(t)$可估计为

$$H'(t)\le b\|u\|_{H^1}^{2p}\le bH(t)^p,$$

解得

$$H(t)\le\left(H(0)^{1-p}-(p-1)bt\right)^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{3.10}$$

(3.9)和(3.10)说明$H(t)$至少在$[0,T)$上是有界的, 其中T由(3.5)定义.

情形2 当$\beta=0$时, 由条件(2.1)和Young不等式, 可知

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^{p-1}uu_t\mathrm{d}x\le&\|u\|_{L^{2p}}^p\|u_t\|\le C_*^p\|u\|_{H^1}^p\|u_t\|\\ \le&\frac12\left(C_*^{2p}\frac{1}{\gamma}\|u\|_{H^1}^{2p}+\gamma\|u_t\|^2\right).\end{aligned}$$

将上式带入(3.7) 可得

$$H'(t)\le C_*^{2p}\frac{1}{\gamma}H(t)^p,$$

$$H(t)\le\left(H(0)^{1-p}-C_*^{2p}\frac{1}{\gamma}(p-1)t\right)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

这个式子说明$H(t)$至少在$[0,T)$上是有界的, 其中T由(3.6)定义. 定理得证.

参考文献:

[1] BOUSSINESQ J. Théorie des ondes et de remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal en communiquant au liqude contene dans ce cannal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au foud[J]. J. Math. Pures. Appl., 1872, 17: 55-108.

[2] BONA J L, SACHS R L. Global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq equation[J]. Comm. Math. Phys., 1988, 118: 15-29.

[3] CHRISTOV C I, VELARDE M G. Inelastic interaction of Boussinesq solitons[J]. Int. J Bifurc. Chaos, 1994, 4: 1095-1112.

[4] LINARES F. Global existence of small solutions for a generalized Boussinesq equation[J]. J. Differ. Eq., 1993, 106: 257-293.

[5] LIU Yue. Instability and blow-up of solutions to a generalized Boussinesq equation[J]. SIAM J. Math. Anal., 1995, 26: 1527-1546.

[6] LIU Yue. Strong instablity of solitary-wave solutions of a generalized Boussinesq equation[J]. J. Differ. Equ., 2000, 164: 223-239.

[7] PAYNE L E, SATTINGER D H. Sadle points and instability of nonlinear hyperbolic equations[J]. Israel J. Math., 1975, 22: 273-303.

[8] RUSSELL S J. On Waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science[M]. London: John Murray, 1845, 311-390.

[9] SAMSONOV A M. Nonlinear acoustic strain waves in elastic wave guides[M]//Nonlinear Waves in Solids. Vienna: Springer, 1994, 349-382.

[10] TALENTI G. Best constants in Soboleu inequality[J]. Annali di Mat., 1976, 110: 353-372.

[11] WANG Shubin, SU Xiao, Global existence and nonexistence of the initial-boundary value problem for the dissipative Boussinesq equation[J]. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., 2016, 134: 164-188.

[12] WANG Shubin, SU Xiao, The Cauchy problem for the dissipative Boussinesq equation[J]. Nonlinear Anal. Real World Appl., 2019, 45: 116-141.

[13] ZAKHAROV V E. On stochastization of one-dimensional chains of nonlinear oscillators[J]. Sov. Phy. JETP, 1974, 38: 108-110.

A Blowup Result for the Dissipative Boussinesq Equation

SU Xiao[1], *WANG Shubin*[2], *SONG Ruili*[3]

(*1. College of Science, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China*;

2. School of Mathematics and Statistics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China;

3. College of Information & Business, Zhongyuan University of Technology, Zhengzhou 450007, China)

Abstract: This paper is devoted to the finite time blow up of the weak solutions of the initial-boundary value problem for the dissipative Boussinesq equations. We provide the sufficient and necessary conditions of finite time blow-up of weak solutions with the initial data from the potential well, and give the lower bounds of the lifepan time. This paper is a note of WANG and SU(2016).

Key words: Dissipative Boussinesq equation; Initial-boundary value problem; Blow up