

# 带有标准发生率和信息干预的时滞SIRS传染病模型的稳定性分析

赵英英, 胡华

(宁夏大学数学统计学院, 宁夏 银川 750021)

**摘要:** 本文考虑一类具有标准发生率和信息干预的时滞SIRS传染病模型. 通过分析模型的特征方程, 讨论无病平衡点和地方病平衡点局部渐近稳定性. 应用Halalay不等式对无病平衡点的全局渐近稳定性进行证明. 通过构造适当的Lyapunov函数讨论地方病平衡点全局渐近稳定性. 最后通过数值模拟分析一些重要参数对疾病传播的影响.

**关键词:** SIRS传染病模型; 信息干预; 时滞; 稳定性

**中图分类号:** O211.63; O175.13

**AMS(2000)主题分类:** 60H30

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1001-9847(2019)04-0796-09

## 1. 引言

长期以来, 人类健康受到传染病的巨大威胁. 为了减缓其对人类威胁, 大量的数学模型被建立且用于分析传染病的动力学行为. 其中经典的是 Kermack和 Mckendrick<sup>[1]</sup>对伦敦的黑死病和孟买的瘟疫传播规律的研究. 除此以外关于传染病的还有许多著名的模型<sup>[1-3]</sup>, 这些模型为我们提供了有用的控制措施. 一个由 Lahrouz 等人提出的SIRS模型<sup>[4]</sup>有以下形式:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = (1-p)\Lambda - \frac{\beta S(t)I(t)}{\psi(I(t))} - \mu S(t) + \delta_0 R(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{\psi(I(t))} - (\mu + \delta + \gamma)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = p\Lambda + \gamma I(t) - (\mu + \delta_0)R(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

为了更好地控制传染病的传播, 除了采取药物管制措施 (如接种疫苗和抗病毒药物) 以外, 还应采取非药物控制措施 (包括信息干预)<sup>[5-6]</sup>. 在传染病传播初期, 由于药物干预措施的缺乏有必要研究一个由于非药物控制措施即信息干预对疾病流行影响的模型. Kumar<sup>[6]</sup>等人提出了连续SIRS传染病模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) - \mu_1 m Z(t)S(t) + \delta_0 R(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu + \delta + \gamma)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) + \mu_1 m Z(t)S(t) - (\mu + \delta_0)R(t), \\ \frac{dZ(t)}{dt} = \frac{aI(t)}{1+bI(t)} - a_0 Z(t). \end{cases} \quad (1.2)$$

上述两个模型均没有考虑时滞的影响, 这是不符合实际的. 事实上, 流行病的传播具有时滞这一特点具体包括潜伏期时滞, 感染期时滞, 失去免疫期时滞等<sup>[7-9]</sup>. Cooke<sup>[10]</sup>研究了一个

\* 收稿日期: 2018-09-11

**基金项目:** 国家自然科学基金 (11361044), 宁夏自治区研究生教育创新计划项目 (YKC201709), 宁夏高校科学研究项目 (NGY2018049)

**作者简介:** 赵英英, 女, 汉族, 山西人, 研究方向: 随机微分方程及其应用.

**通讯作者:** 胡华.

带时滞的SIR模型，其中传染率函数为 $\beta S(t)I(t - \tau)$ ,  $\tau$ 是一个固定时间，只有经过这段时间，易感人群才能被感染者感染。模型如下：

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta S(t)I(t - \tau) - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t - \tau) - (\mu + \gamma)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t). \end{cases} \quad (1.3)$$

结合这三个模型，即考虑时滞影响及标准发生率下的SIRS模型：

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = (1 - p)\Lambda - \frac{\beta S(t)I(t - \tau)}{N(t)} - \mu S(t) - \mu_1 m Z(t)S(t) + \delta_0 R(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t - \tau)}{N(t)} - (\mu + \delta + \gamma)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = p\Lambda + \gamma I(t) + \mu_1 m Z(t)S(t) - (\mu + \delta_0)R(t), \\ \frac{dZ(t)}{dt} = \frac{aI(t)}{1 + bI(t)} - a_0 Z(t), \end{cases} \quad (1.4)$$

其中 $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$ 和 $Z(t)$ 分别代表易感人群, 感染人群, 恢复人群和信息在 $t$ 的数量,  $I(t - \tau)$ 代表在 $t$ 时刻经过潜伏期后处于感染期的感染者数量,  $\tau > 0$ 是一定值, 代表已感染者成为带菌者所需要的时间,  $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ .  $\Lambda$ 是人口的流入率或更新率, 其中比例 $p$ 的人是接种疫苗的,  $1 - p$ 是容易感染的( $0 \leq p \leq 1$ ).  $\gamma$ 是感染人群的恢复率,  $\mu$ 是自然死亡率,  $\delta$ 是疾病引起的死亡率,  $\beta$ 是接触传播系数,  $\delta_0 (= \delta_1 + \delta_2)$ 表示失去免疫的总比率, 包括失去自然免疫的比率 $\delta_1$ 和失去由于保障措施所得的免疫力的比率 $\delta_2$ ,  $m$ 表示信息交互率,  $\mu_1$  ( $0 \leq \mu_1 \leq 1$ )代表反应强度,  $a$ 表示信息的增长速度,  $b$ 是饱和常数,  $a_0$ 是信息的自然衰减率. 所有参数假定非负.

基本再生数<sup>[11]</sup>是流行病学中的一个重要概念. 模型(1.4)的基本再生数为

$$R_0 = \frac{\beta(1 - p)(\mu + \delta_0) + \beta\delta_0 p}{(\mu + \delta_0)(\mu + \delta + \gamma)}.$$

模型(1.4)有两个均衡点<sup>[6]</sup>: 一个是无病平衡点 $E_0 = (\frac{\Lambda[(1-p)\mu + \delta_0]}{\mu(\mu + \delta_0)}, 0, \frac{p\Lambda}{\mu + \delta_0}, 0)$ , 另一个是地方病平衡点 $E^* = (S^*, I^*, R^*, Z^*)$ . 无病平衡点总是存在的, 地方病平衡点只有满足 $R_0 > 1$ 才存在.

## 2. 平衡点的局部渐近稳定性分析

本节通过分析模型(1.4)对应的特征方程, 分别对模型(1.4)的无病平衡点 $E_0 = (\frac{\Lambda[(1-p)\mu + \delta_0]}{\mu(\mu + \delta_0)}, 0, \frac{p\Lambda}{\mu + \delta_0}, 0)$ 和地方病平衡点 $E^* = (S^*, I^*, R^*, Z^*)$ 的局部渐近稳定性进行讨论.

**引理2.1**(Routh-Hurwitz 判据)<sup>[12]</sup> 设给定常系数的 $n$ 次代数方程

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

该方程的所有根具有负实部的充要条件是下述所有行列式同号

$$\Delta_0 \triangleq a_0, \Delta_1 \triangleq a_1, \Delta_2 \triangleq \det \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_3 \triangleq \det \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}, \dots, \Delta_n \triangleq \det \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

构造上述行列式时, 若 $i > n$ , 则取 $a_i = 0$ .

**定理2.1**  $\tau \geq 0$ 时, 若 $R_0 < 1$ , 则模型(1.4)在无病平衡点 $E_0 = (\frac{\Lambda[(1-p)\mu + \delta_0]}{\mu(\mu + \delta_0)}, 0, \frac{p\Lambda}{\mu + \delta_0}, 0)$ 处是局部渐近稳定的; 若 $R_0 > 1$ , 则模型(1.4)在 $E_0$ 处不稳定.

**证** 模型(1.4)在无病平衡点 $E_0 = (\frac{\Lambda[(1-p)\mu + \delta_0]}{\mu(\mu + \delta_0)}, 0, \frac{p\Lambda}{\mu + \delta_0}, 0)$ 处的 Jacobian 矩阵是

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\frac{\beta[(1-p)\mu + \delta_0]}{\mu + \delta_0} e^{-\lambda\tau} & \delta_0 & -\mu_1 m \frac{\Lambda[(1-p)\mu + \delta_0]}{\mu(\mu + \delta_0)} \\ 0 & \frac{\beta S}{N} e^{-\lambda\tau} - (\mu + \delta + \gamma) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -(\mu + \delta_0) & \mu_1 m S \\ 0 & \frac{a}{1 + bI} & 0 & -a_0 \end{pmatrix}.$$

从而在 $E_0$ 处的特征方程为

$$(\lambda + \mu)\left[\lambda - \frac{\beta[(1-p)\mu + \delta_0]}{\mu + \delta_0}e^{-\lambda\tau} + (\mu + \delta + \gamma)\right](\lambda + \mu + \delta_0)(\lambda + a_0) = 0. \quad (2.1)$$

不难发现(2.1)有三个特征根 $\lambda_1 = -\mu < 0$ ,  $\lambda_2 = -(\mu + \delta_0) < 0$ ,  $\lambda_3 = -a_0 < 0$ , 为求(2.1)的另一个根, 令

$$f(\lambda) = \lambda - \frac{\beta[(1-p)\mu + \delta_0]}{\mu + \delta_0}e^{-\lambda\tau} + (\mu + \delta + \gamma). \quad (2.2)$$

当 $\tau = 0$ 时, (2.2)化为 $f(\lambda) = \lambda + (\mu + \delta + \gamma)(1 - R_0)$ , 该方程的根 $\lambda_4 = (\mu + \delta + \gamma)(R_0 - 1)$ . 当 $R_0 < 1$ 时, 特征方程的四个根均小于0, 故该模型的无病平衡点 $E_0$ 是局部渐近稳定的. 反之, 当 $R_0 > 1$ 时,  $\lambda_4 > 0$ , 所以 $E_0$ 不稳定.

当 $\tau > 0$ 时,  $f(\lambda)$ 表达式仍为(2.2). 设 $f(\lambda) = 0$ 的根为 $\lambda = \alpha + i\beta$ , 将其代入 $f(\lambda)$ 中得

$$\alpha + i\beta - \frac{\beta[(1-p)\mu + \delta_0]}{\mu + \delta_0}e^{(-\alpha+i\beta)\tau} + (\mu + \delta + \gamma) = 0,$$

比较实部和虚部得到

$$\alpha - \frac{\beta[(1-p)\mu + \delta_0]}{\mu + \delta_0}e^{-\alpha\tau}\cos\beta\tau + \mu + \delta + \gamma = 0.$$

当 $R_0 < 1$ 时,  $\alpha = \frac{\beta[(1-p)\mu + \delta_0]}{\mu + \delta_0}e^{-\alpha\tau}\cos\beta\tau - (\mu + \delta + \gamma) < \frac{\beta[(1-p)\mu + \delta_0]}{\mu + \delta_0} - (\mu + \delta + \gamma) < 0$ . 此时, 特征方程(2.1)的所有根的实部均为负, 所以 $E_0$ 局部渐近稳定. 当 $R_0 > 1$ 时, 有

$$f(0) = 0 - \frac{\beta[(1-p)\mu + \delta_0]}{\mu + \delta_0}e^{-0\tau} + (\mu + \delta + \gamma) = \mu + \delta + \gamma - \frac{\beta[(1-p)\mu + \delta_0]}{\mu + \delta_0} < 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = +\infty.$$

此时,  $f(\lambda) = 0$ 有一个正实根. 所以当 $R_0 > 1$ 时,  $E_0$ 不稳定.

**注** 当 $R_0 < 1$ 时, 对任意的 $\tau$ , 模型(1.4)在无病平衡点处局部渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 对任意的 $\tau$ , 模型(1.4)在无病平衡点处不稳定, 即 $R_0$ 是模型(1.4)的一个阈值.

**定理2.2** 假设 $R_0 > 1$ 成立且 $\tau = 0$ 时, 模型(1.4)的地方病平衡点 $E^*$ 局部渐近稳定.

**证** 模型(1.4)在地方病平衡点 $E^* = (S^*, I^*, R^*, Z^*)$ 处的Jacobian矩阵是

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I^*}{N^*} - \mu - \mu_1 m Z^* & -\frac{\beta S^*}{N^*}e^{-\lambda\tau} & \delta_0 & -\mu_1 m S^* \\ \frac{\beta I^*}{N^*} & \frac{\beta S^*}{N^*}e^{-\lambda\tau} - (\mu + \delta + \gamma) & 0 & 0 \\ \mu_1 m Z^* & \gamma & -(\mu + \delta_0) & \mu_1 m S^* \\ 0 & \frac{a}{1+bI^*} & 0 & -a_0 \end{pmatrix}.$$

从而在 $E^*$ 处的特征方程为

$$(\lambda + a)(\lambda + \mu)[(\lambda^2 + m_1\lambda + m_2) + (n_1\lambda + n_2)e^{-\lambda\tau}] = 0. \quad (2.3)$$

不难发现, (2.3)有两个特征根 $\lambda_1 = -a < 0$ ,  $\lambda_2 = -\mu < 0$ , 令

$$\lambda^2 + m_1\lambda + m_2 + (n_1\lambda + n_2)e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (2.4)$$

其中

$$m_1 = \mu + \delta + \gamma + \mu + \mu_1 m Z^* + \delta_0,$$

$$m_2 = \mu(\mu + \delta + \gamma) + \mu_1 m Z^*(\mu + \delta + \gamma) + \delta_0(\mu + \delta + \gamma) + \frac{\beta I^*}{N^*} \left( \frac{\delta_0(\mu + \delta)}{\mu} + \frac{a\mu_1 m S^*}{a_0(1+bI^*)} + \mu + \delta + \gamma \right),$$

$$n_1 = -\frac{\beta S^*}{N^*},$$

$$n_2 = -\frac{\beta S^*}{N^*}\mu - \frac{\beta S^*}{N^*}\mu_1 m Z^* - \frac{\beta S^*}{N^*}\delta_0.$$

当 $\tau = 0$ 时, (2.4)式化为 $\lambda^2 + (m_1 + n_1)\lambda + m_2 + n_2 = 0$ . 则

$$\begin{aligned} m_1 + n_1 &= \mu + \delta + \gamma + \mu + \mu_1 m Z^* + \delta_0 - \frac{\beta S^*}{N^*} = \mu + \delta + \gamma + \mu + \mu_1 m Z^* + \delta_0 - (\mu + \delta + \gamma) \\ &= \mu + \mu_1 m Z^* + \delta_0 > 0, \\ m_2 + n_2 &= \frac{\beta I^*}{N^*} \left( \frac{\delta_0(\mu + \delta)}{\mu} + \frac{a\mu_1 m S^*}{a_0(1 + bI^*)} + \mu + \delta + \gamma \right) > 0. \end{aligned}$$

根据Routh-Hurwitz判据可得当 $\tau = 0$ 时, (2.4)式有两个负实根. 所以此时特征方程的所有根都是负实根, 定理得证.

**定理2.3** 假设 $R_0 > 1$ 成立且 $\tau > 0$ 时, 若 $(\mu + \mu_1 m Z^* + \delta_0)^2 - \frac{2\beta I^*}{N^*} \left( \frac{\delta_0(\mu + \delta)}{\mu} + \frac{a\mu_1 m S^*}{a_0(1 + bI^*)} + \mu + \delta + \gamma \right) > 0$ , 则模型(1.4)的地方病平衡点 $E^*$ 局部渐近稳定.

**证** 用反证法证明上述结论. 假设方程(2.4)有非负实部, 则其解必须是虚数. 由 $\tau = 0$ 到 $\tau > 0$ 的过程中, 必有一个 $\tau^* > 0$ , 使得(2.4)有纯虚根. 不妨设 $\lambda = iw$ 是(2.4)的解. 代入得

$$(iw)^2 + m_1(iw) + m_2 + [n_1(iw) + n_2]e^{-iw\tau} = 0,$$

整理上式可得

$$w^4 + (m_1^2 - 2m_2 - n_1^2)w^2 + m_2^2 - n_2^2 = 0. \quad (2.5)$$

令 $u = w^2$ , (2.5)式化为

$$u^2 + (m_1^2 - 2m_2 - n_1^2)u + m_2^2 - n_2^2 = 0, \quad (2.6)$$

则

$$\begin{aligned} m_1^2 - 2m_2 - n_1^2 &= (m_1 + n_1)(m_1 - n_1) - 2m_2 \\ &= (\mu + \mu_1 m Z^* + \delta_0)^2 - \frac{2\beta I^*}{N^*} \left( \frac{\delta_0(\mu + \delta)}{\mu} + \frac{a\mu_1 m S^*}{a_0(1 + bI^*)} + \mu + \delta + \gamma \right) > 0, \\ m_2^2 - n_2^2 &= (m_2 + n_2)(m_2 - n_2) > 0. \end{aligned}$$

根据Routh-Hurwitz判据可得(2.6)式无正实根. 即 $u = w^2$ 无根, 即不存在纯虚根 $\lambda = iw$ , 也就是 $E^*$ 的稳定性不变, 故 $R_0 > 1$ 且 $\tau > 0$ 时, 若 $(\mu + \mu_1 m Z^* + \delta_0)^2 - \frac{2\beta I^*}{N^*} \left( \frac{\delta_0(\mu + \delta)}{\mu} + \frac{a\mu_1 m S^*}{a_0(1 + bI^*)} + \mu + \delta + \gamma \right) > 0$ ,  $E^*$ 局部渐近稳定.

### 3. 平衡点的全局渐近稳定性分析

**引理3.1**(Halanay不等式)<sup>[13]</sup> 设 $f(t) \geq 0$ 且连续( $t \geq t_0 - r$ ),  $0 < \beta < \alpha$ ,  $f'(t) \leq -\alpha f(t) + \beta \|f_t\|$ ,  $t \geq t_0$ ,  $\|f_t\| = \sup_{t-r \leq s \leq t} |f(s)|$ , 则 $f(t) \leq \|f_{t_0}\| e^{-\lambda(t-t_0)}$  ( $t \geq t_0$ ), 其中 $\lambda = \alpha - \beta e^{\lambda r}$ .

**定理3.1** 若 $\beta < \mu + \delta + \gamma$ 且 $\frac{A}{\mu} < 1$ , 则模型(1.4)的无病平衡点 $E_0$ 是全局渐近稳定的.

**证** 任取模型(1.4)满足初始条件的正解 $(S(t), I(t), R(t), Z(t))$ , 若 $\beta < \mu + \delta + \gamma$ ,  $\frac{A}{\mu} < 1$ , 取任意小的 $\epsilon > 0$ , 使其满足:

$$\beta \left( \frac{A}{\mu} + \epsilon \right) < \mu + \delta + \gamma. \quad (3.1)$$

将模型(1.4)的前三个方程相加, 可知人口总量 $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ 满足如下微分方程:

$$dN(t) = [A - \mu N(t) - \delta I(t)]dt.$$

所以 $\frac{dN(t)}{dt} \leq A - \mu N(t)$ , 即 $\frac{dN(t)}{dt} + \mu N(t) \leq A$ , 将此不等式左右两边同乘以 $e^{\mu t}$ 并积分有:

$$\int_0^t \left[ \frac{dN(t)}{dt} + \mu N(t) \right] e^{\mu t} dt \leq \int_0^t A e^{\mu t} dt,$$

因此有:

$$N(t) \leq N(0)e^{-\mu t} + \frac{A}{\mu}(1 - e^{-\mu t}),$$

进一步可以得到:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu},$$

因此模型的所有解  $S, I, R$  均具有上界  $\frac{\Lambda}{\mu}$ . 设  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} S(t) \leq M < \frac{\Lambda}{\mu}$ . 所以对于满足(3.1)的足够小的  $\epsilon > 0$ , 存在  $T_1 > 0$ , 使得当  $t > T_1$  时, 有  $S(t) < M + \epsilon$  成立.

对上述  $\epsilon > 0$ , 当  $t > T_1 + \tau$  时, 由模型(1.4)的第二个方程有:

$$\frac{dI(t)}{dt} \leq \frac{\beta(M + \epsilon)I(t - \tau)}{N(t)} - (\mu + \delta + \gamma)I(t) \leq \beta(M + \epsilon)I(t - \tau) - (\mu + \delta + \gamma)I(t).$$

由引理 3.1 和(3.1)有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ , 则  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ . 所以对于满足不等式(3.1)的足够小的  $\epsilon > 0$ , 存在  $T_2 > T_1 + \tau$ , 使得当  $t > T_2$  时, 有  $I(t) < \epsilon$  成立.

对上述  $\epsilon > 0$ , 当  $t > T_2$  时, 由模型的最后一个方程有:

$$\frac{dZ(t)}{dt} \leq a\epsilon - a_0Z(t).$$

经计算得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} Z(t) \leq \frac{a\epsilon}{a_0}.$$

令  $\epsilon \rightarrow 0$ , 我们有  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} Z(t) \leq 0$ . 另一方面,  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} Z(t) \geq 0$ , 因此  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} Z(t) = 0$  a.s. 所以对满足不等式(3.1)的足够小的  $\epsilon > 0$ , 存在  $T_3 > T_2$ , 使得当  $t > T_3$  时, 有  $Z(t) < \epsilon$  成立.

对上述  $\epsilon > 0$ , 当  $t > T_3$  时, 由模型的第三个方程有:

$$\frac{dR(t)}{dt} \leq p\Lambda + \gamma\epsilon + \mu_1 m\epsilon(M + \epsilon) - (\mu + \delta_0)R(t).$$

经计算有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} R(t) \leq \frac{p\Lambda + \gamma\epsilon + \mu_1 m\epsilon(M + \epsilon)}{\mu + \delta_0}.$$

令  $\epsilon \rightarrow 0$ , 我们有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} R(t) \leq \frac{p\Lambda}{\mu + \delta_0}. \quad (3.2)$$

另一方面

$$\frac{dR(t)}{dt} \geq p\Lambda - (\mu + \delta_0)R(t).$$

经计算有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} R(t) \geq \frac{p\Lambda}{\mu + \delta_0}. \quad (3.3)$$

由不等式(3.2)和(3.3), 我们有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \frac{p\Lambda}{\mu + \delta_0}.$$

所以, 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $T_4 > T_3$ , 使得当  $t > T_4$  时, 由模型的第一个方程有:

$$\frac{dS(t)}{dt} \leq (1 - p)\Lambda - \mu S(t) + \delta_0 \left( \frac{p\Lambda}{\mu + \delta_0} + \epsilon \right).$$

经计算有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} S(t) \leq \frac{(1 - p)\Lambda + \frac{p\Lambda}{\mu + \delta_0} + \epsilon}{\mu}.$$

令  $\epsilon \rightarrow 0$ , 我们有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} S(t) \leq \frac{(1 - p)\Lambda + \frac{p\Lambda}{\mu + \delta_0}}{\mu}. \quad (3.4)$$

另一方面

$$\frac{dS(t)}{dt} \geq (1-p)\Lambda - \beta\epsilon - \mu S(t) - \mu_1 m \epsilon S(t) + \delta_0 \left( \frac{p\Lambda}{\mu + \delta_0} - \epsilon \right).$$

令  $\epsilon \rightarrow 0$ , 我们有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq \frac{(1-p)\Lambda + \frac{p\Lambda}{\mu + \delta_0}}{\mu}. \quad (3.5)$$

由不等式(3.4)和(3.5), 我们有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \frac{(1-p)\Lambda + \frac{p\Lambda}{\mu + \delta_0}}{\mu}.$$

综上, 若  $\beta < \mu + \delta + \gamma$  且  $\frac{\Lambda}{\mu} < 1$ , 模型(1.4)的无病平衡点  $E_0$  是全局渐近稳定的.

**定理3.2** 若  $R_0 > 1$ ,  $\text{sgn}(S(t) - S^*(t)) = \text{sgn}(I(t) - I^*(t)) = \text{sgn}(R(t) - R^*(t)) = \text{sgn}(Z(t) - Z^*(t))$ , 则模型(1.4)的地方病平衡点  $E^*$  是全局渐近稳定的.

**证** 令  $x = S - S^*$ ,  $y = I - I^*$ ,  $u = R - R^*$ ,  $v = Z - Z^*$ . 构造Lyapunov函数

$$V(t) = |x(t)| + |y(t)| + |u(t)| + |v(t)|.$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \text{sgn}(x(t))\dot{x}(t) + \text{sgn}(y(t))\dot{y}(t) + \text{sgn}(u(t))\dot{u}(t) + \text{sgn}(v(t))\dot{v}(t) \\ &= \text{sgn}(x(t))[-\mu(x(t) + S^*)] + \text{sgn}(y(t))[-(\mu + \delta)(y(t) + I^*)] + \text{sgn}(u(t))[-\mu(u(t) + R^*)] \\ &\quad + \text{sgn}(v(t))[-a_0(v(t) + Z^*)] \\ &\leq -\varrho(|x(t)| + |y(t)| + |u(t)| + |v(t)|), \end{aligned}$$

其中  $\varrho = \min\{\mu, a_0\}$ . 将上式两边从0到  $t$  积分得

$$V(t) + \varrho \int_0^t (|x(s)| + |y(s)| + |u(s)| + |v(s)|) ds \leq V(0) < +\infty.$$

因此, 对任意  $t \geq 0$ ,  $V(t)$  在  $[0, t]$  内有界同时

$$\int_0^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty, \int_0^{+\infty} |y(t)| dt < +\infty, \int_0^{+\infty} |u(t)| dt < +\infty, \int_0^{+\infty} |v(t)| dt < +\infty.$$

根据Barbălat引理<sup>[14]</sup>可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (|x(t)| + |y(t)| + |u(t)| + |v(t)|) = 0.$$

故

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S^*, \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = I^*, \lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = R^*, \lim_{t \rightarrow +\infty} Z(t) = Z^*.$$

定理得证.

**注** 当  $\beta < \mu + \delta + \gamma$  且  $\frac{\Lambda}{\mu} < 1$  时, 模型(1.4)的无病平衡点  $E_0$  是全局稳定的, 这表明在此条件下该传染病将逐渐消失不会流行; 当  $R_0 > 1$  时, 模型(1.4)的地方病平衡点  $E^*$  是全局稳定的, 这表明在此条件下该传染病将会流行并将最终成为地方病.

#### 4. 数值分析和结论

继研究带有标准发生率和信息干预的时滞SIRS传染病模型平衡点的局部渐近稳定性和全局渐近稳定性之后, 下面对该模型进行可视化并借助Matlab 7.1来进一步分析信息干扰因素以及系统一些参数对疾病传播的动力学影响. 对模型(1.4), 令参数的取值为:

$$\begin{aligned} \Lambda &= 2.8, \beta = \{0.02, 0.2\}, \mu = 0.002, \mu_1 = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}, m = 0.017, \delta = 0.01, \\ \delta_0 &= 0.01, \gamma = 0.005, p = 0.3, a = 0.01, a_0 = 0.045, b = 1, \tau = \{0.1, 1, 10\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

方程的初始值为  $(S_0, I_0, R_0, Z_0) = (479.0, 20.0, 1.0, 10.0)$ .

#### 例4.1 可变参数 $\mu_1$ 的作用

下面研究人们对信息的反应强度(以下简称“反应强度”)  $\mu_1$  的作用. 式(4.1)中取  $\beta = 0.02, \tau = 0.1$ , 其余参数不变, 此时  $R_0 > 1$ . 图4.1给出反应强度  $\mu_1$  取不同值 ( $\mu_1 = 0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00$ ) 时, 模型(1.4)中  $I(t)$  的时间序列图. 从图可以看出, 在患病人数趋于稳定时, 信息干预可以减少患病人数.

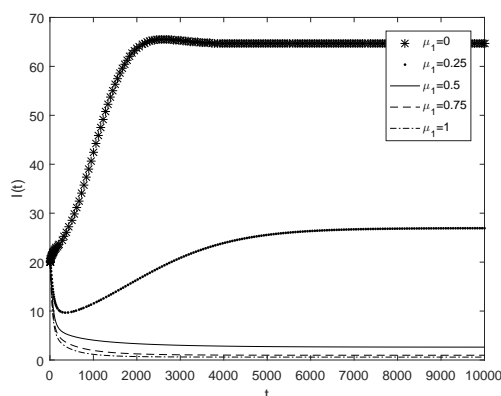


图4.1 反应强度 $\mu_1$ 对 $I(t)$ 的影响

#### 例4.2 可变参数 $\beta$ 的作用

下面研究接触传播系数  $\beta$  的作用. 式(4.1)中取  $\mu_1 = 0.25, \tau = 0.1$ , 其余参数不变, 此时  $R_0 > 1$ . 图4.2, 图4.3分别给出接触传播系数  $\beta$  取不同值 ( $\beta = 0.02, 0.2$ ) 时, 模型(1.4)中对应的  $S(t), I(t)$  的时间序列图. 图4.2(b)和图4.3(b)分别为对应的图4.2(a)和图4.3(a)的局部小图. 从图4.2可以看出在初始阶段  $S(t)$  的变化较为复杂, 之后  $S(t)$  趋于稳定且此时  $\beta$  越大, 易感人数越少. 从图4.3可以看出在初始阶段  $I(t)$  的变化较为复杂, 之后  $I(t)$  趋于稳定且此时  $\beta$  越大, 感染人数越多.

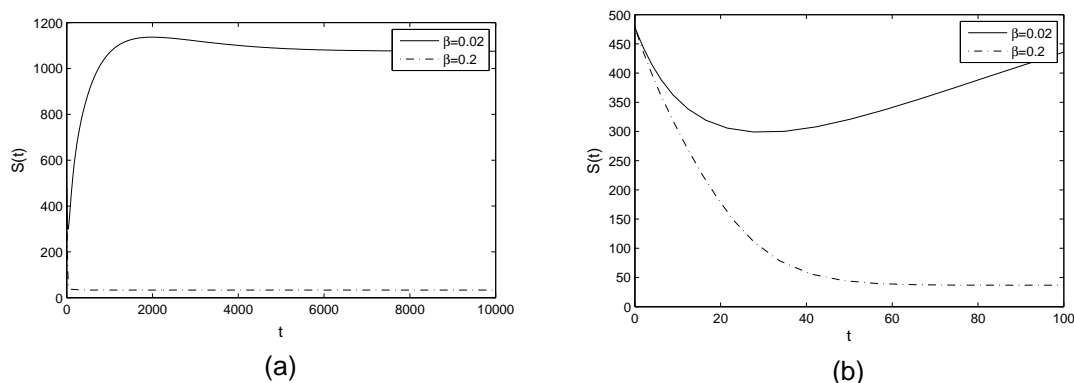


图4.2 接触传播系数 $\beta$ 对 $S(t)$ 的影响

#### 例4.3 可变参数 $\tau$ 的作用

下面研究时滞  $\tau$  的作用. 式(4.1)中取  $\mu_1 = 0.25, \beta = 0.02$ , 其余参数不变, 此时  $R_0 > 1$ . 图4.4, 图4.5分别给出时滞  $\tau$  取不同值 ( $\tau = 0.1, 1, 10$ ) 时, 模型(1.4)中对应的  $S(t), I(t)$  的时间序列图. 从图4.4, 图4.5可以看出, 在初始阶段不同的时滞  $\tau$  对  $S(t), I(t)$  产生不同的较为复杂的变化, 之后  $S(t), I(t)$  均趋于稳定且与时滞无关, 即经过一段时间后模型(1.4)的地方病平衡点  $E^*$  全

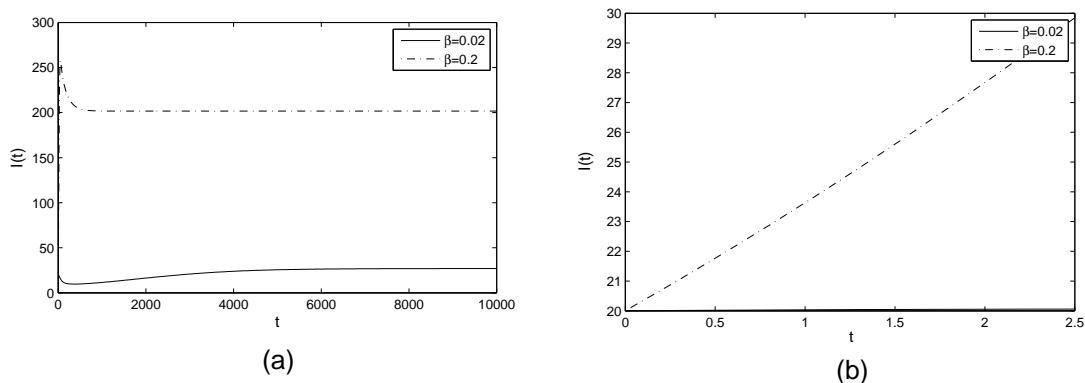


图4.3 接触传播系数 $\beta$ 对 $I(t)$ 的影响

局稳定且与时滞无关.

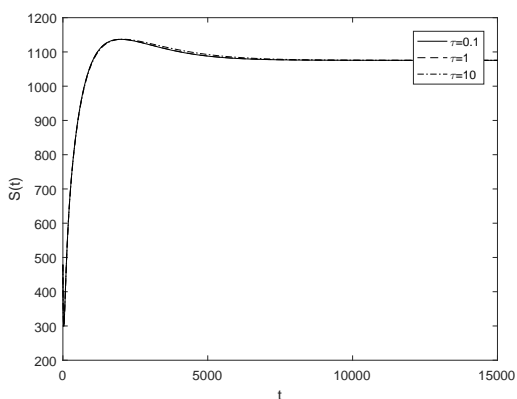


图4.4  $\tau$ 对 $S(t)$ 的影响

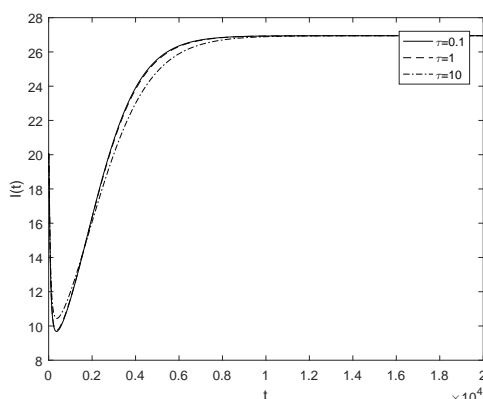


图4.5  $\tau$ 对 $I(t)$ 的影响

总之, 本文研究了一类带有标准发生率和信息干预的时滞SIRS传染病模型. 通过分析模型的特征方程, 讨论了无病平衡点和地方病平衡点局部渐近稳定性. 应用Halanay不等式对无病平衡点的全局渐近稳定性进行了证明. 通过构造适当的Lyapunov函数讨论了地方病平衡点全局渐近稳定性. 最后运用Matlab 7.1进一步分析了信息干扰因素以及系统一些参数对疾病传播的动力学影响.

参考文献:

- [1] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics-I[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1991, 53(1): 33-55.
- [2] MA Z E, ZHOU Y C, WU J H. Modeling and Dynamics of Infectious Diseases[M]. Beijing: Higher Education Press, 2009.
- [3] LIU Q, CHEN Q. Analysis of the deterministic and stochastic SIRS epidemic models with nonlinear incidence[J]. Physica A, 2015, 428(1): 140-153.
- [4] LAHROUZ A, OMARI L, KIOUACH D, et al. Complete global stability for an SIRS epidemic model with generalized non-linear incidence and vaccination[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(1): 6519-6525.



- [5] UN I W, JANN T W, SHAN C C, et al. Impacts of a mass vaccination campaign against pandemic H1N1 2009 influenza in Taiwan: A time-series regression analysis[J]. *International Journal of Infectious Diseases*, 2014, 23(1): 82-89.
- [6] KUMAR A, SRIVASTAVA P K, TAKEUCHI Y. Modeling the role of information and limited optimal treatment on disease prevalence[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2017, 414(1): 103-119.
- [7] ZHANG T L, LIU J L, TENG Z D. Stability of Hopf bifurcation of a delayed SIRS epidemic model with stage structure[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, 11(1): 293-306.
- [8] ZHANG F P, LI Z Z, ZHANG F. Global stability of an SIR epidemic model with constant infectious period[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 199(1): 285-291.
- [9] QI L X, CUI J A. The stability of an SEIRS model with nonlinear incidence, vertical transmission and time delay[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 221(1): 360-366.
- [10] COOKE K L. Stability analysis for a vector disease model[J]. *Rocky Mountain J. of Math.*, 1979, 9(1): 31-42.
- [11] HEFFERNAN J M, SMITH R J, WAHL L M. Perspectives on the basic reproductive ratio[J]. *Journal of The Royal Society Interface*, 2005, 2(4): 281-293.
- [12] 杨绍普, 申永军. 滞后非线性系统的分岔与奇异性[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [13] HALANAY A. *Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags*[M]. New York: Academic Press, 1966.
- [14] BARBALAT I. Systemes d'equations differentielle d'oscillations nonlineaires[J]. *Revue Roumaine de Mathematique Pures et Appliquees*, 1959, 4: 267-270.

## Stability Analysis of Time-Delay SIRS Epidemic Model with Standard Incidence Rate and Information Intervention

ZHAO Yingying, HU Hua

(*School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China*)

**Abstract:** In this paper, a class of time-delay SIRS infectious disease model with standard incidence and information intervention is considered. By analyzing the characteristic equations of the model, the local asymptotic stabilities of the disease-free equilibrium and endemic equilibrium are discussed. The global asymptotic stability of the disease-free equilibrium is proved by using the Halanay inequality. The global asymptotic stability of endemic equilibrium is discussed by constructing a suitable Lyapunov function. Finally, the influence of some important parameters about disease transmission is analyzed by numerical simulation.

**Key words:** SIRS epidemic model; Information intervention; Time delay; Stability