应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2019, 32(4): 805-810

一阶非自治共振系统周期解的存在性

陈瑞鹏, 李小亚
(北方民族大学数学与信息科学学院, 宁夏 银川 750021)

摘要: 研究一阶非自治共振系统周期解的存在性, 其中非线性项为连续周期函数. 运用Miranda定理和Schauder不动点定理, 本文为上述系统建立周期解存在性的新结果. 所得结论丰富并补充已有文献的相关结论.
关键词: 非自治系统; 共振; 周期解; 存在性; Miranda定理
中图分类号: O175.8　　**AMS(2000)主题分类:** 34B15; 34B18
文献标识码: A　　**文章编号:** 1001-9847(2019)04-0805-06

1. 引言与主要结果

近年来, 非线性微分方程

$$u' + a(t)u = \lambda b(t) f(t, u(t - \tau(t))), \quad u(0) = u(\omega) \tag{1.1}$$

周期解的存在性被诸多学者深入研究, 其中$a, b \in C(\mathbb{R}, [0, \infty))$为$\omega$-周期函数且满足

$$\int_0^\omega a(t)\mathrm{d}t > 0, \qquad \int_0^\omega b(t)\mathrm{d}t > 0,$$

τ是一个ω-周期连续函数, λ为正参数. 注意到当$\lambda = 0$时, 方程(1.1)将退化为$u' = -a(t)u$, 这恰为经典的马尔萨斯人口模型. 在现实世界应用中, 方程(1.1)主要用于描述与呼吸、心律失常及血细胞生成等密切相关的多种人体生理过程, 相关研究成果见文[1-10]及其参考文献. 同时, 诸多学者致力于研究(1.1)相应的微分系统, 例如 [11-13]等. 特别地, 文[12]讨论了系统

$$x_i' + a_i(t)x_i = \lambda b_i(t) f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.2}$$

正周期解的存在性, 其中$\int_0^\omega a_i(t)\mathrm{d}t > 0$, f_i是连续的、严格正的且在$(0, 0, \cdots, 0)$处具有奇性的函数. 运用Krasnoselskii 不动点定理, 该文证明了对每个充分小的$\lambda > 0$, 系统(1.2)至少存在两个正周期解. 随后, 文[13]对上述结果做了改进与完善. 更具体地, 在文[13]中, 作者证明了存在正数λ^*, 使得当$0 < \lambda < \lambda^*$时, (1.2)至少存在两个正周期解; 当$\lambda = \lambda^*$时, (1.2)至少存在一个正周期解; 而当$\lambda > \lambda^*$ 时, (1.2)不存在正周期解.

注意到基本假设$\int_0^\omega a_i(t)\mathrm{d}t > 0$通常用于保证线性微分方程

$$x' + a_i(t)x = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.3}$$

是非共振的, 该假设在上述所涉及文献的讨论中起到了关键作用. 事实上, 在非共振情形下, 能够运用不动点理论、分歧理论等经典工具研究相应问题并建立存在性结果. 这里称线性方程(1.3)为非共振的, 若它的唯一解是平凡解. 假设h是一个L^1-函数, 当线性方程(1.3)非共振时, 由著名的Fredholm二择一定理可知非齐次问题

$$x' + a_i(t)x = h(t), \quad x(0) = x(\omega),$$

* **收稿日期:** 2018-09-16
基金项目: 国家自然科学基金 (11761004, 61761002), 北方民族大学重大专项项目 (ZDZX201804)
作者简介: 陈瑞鹏, 男, 汉族, 甘肃人, 讲师, 研究方向: 微分方程与动力系统.

存在唯一解, 且可表示为

$$x(t)=\int_0^\omega G(t,s)h(s)\mathrm{d}s,$$

其中$G(t,s)$为(1.3)相应的Green函数, 参见文[7-13]等.

显然, 大多数学者主要研究非共振问题. 相比较而言, 对于共振系统和方程的研究进展十分缓慢, 而且关于共振系统周期解的存在性结果极少. 对于共振情形下非线性微分方程的其它研究工作, 可见文[14-17]等. 于是, 一个自然而有趣的问题是: 当

$$\int_0^\omega a_i(t)\mathrm{d}t=0,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

时, 方程 (1.1)相应的微分系统是否仍存在周期解? 本文将为非自治共振系统

$$\begin{cases} u'+p_1(t)u=f(t,u,v)+c_1(t),\\ v'+p_2(t)v=g(t,u,v)+c_2(t)\end{cases}\tag{1.4}$$

建立新的周期解存在性定理, 从而为该问题给予肯定的回答. 此处称向量函数$(u(t),v(t))$, $t\in\mathbb{R}$, 为系统(1.4)的一个周期解, 若$u(t)=u(t+\omega)$, $v(t)=v(t+\omega)$, $u=u(t)$, $v=v(t)\in C^1[0,\omega]$且满足(1.4). 据我们所知, 上述问题迄今未曾被研究过, 本文所得结果将填补这个空白.

本文总假设:

(H1) $f,g\in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$有界且关于$t$是$\omega$-周期的. 此外, 存在正常数$l_1$和$l_2$, 使得对任意的$(t,x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$,

$$f(t,x,y)x<0,\quad |x|\ge l_1,$$
$$g(t,x,y)y<0,\quad |y|\ge l_2;$$

(H2) $p_i,c_i\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$是$\omega$-周期函数且满足$\int_0^\omega c_i(t)\mathrm{d}t=0$, $i=1,2$.

注 1.1 (H2)蕴含了函数c_i的平均值满足

$$\bar{c}_i:=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega c_i(t)\mathrm{d}t=0,\quad i=1,2.$$

在上述基本假设下, 本文的主要结论是:

定理 1.1 假设(H1)和(H2)成立. 若$p_1(t)\equiv0$, $p_2(t)\equiv0$, 则系统 (1.4)至少存在一个周期解.

注 1.2 由条件$p_1(t)\equiv0$, $p_2(t)\equiv0$可得$\int_0^\omega p_i(t)\mathrm{d}t=0$ $(i=1,2)$, 从而本文所研究的微分系统(1.4)是共振系统.

引理 1.1[18] 令

$$G=\{x\in\mathbb{R}^n:|x_i|<L,\ i=1,2,\cdots,n\},$$

其中$\mathbb{R}^n$是通常的n-维欧式空间, 其范数为$\|x\|=\sum\limits_{i=1}^n|x_i|$, $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. 假设映射$F=(f_1,f_2,\cdots,f_n):\overline{G}\to\mathbb{R}^n$ 在G的闭包$\overline{G}$上连续, 对G的边界∂G上的元素x成立$F(x)\ne\theta=(0,0,\cdots,0)$, 并且

(i) $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},-L,x_{i+1},\cdots,x_n)\ge0,\quad 1\le i\le n$;

(ii) $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},+L,x_{i+1},\cdots,x_n)\le0,\quad 1\le i\le n$.

则$F(x)=\theta$在G中存在一个解.

本文结构作如下安排: 在第二部分我们将证明定理1.1, 并给出具体的例子来阐释本文的主要结果; 在第三部分我们将给出一些相关结果和注记.

2. 主要结果的证明

方便起见, 首先给出一些符号和定义.

定义线性微分算子$L_i: D(L_i) \to E$,

$$L_i x := x' + p_i(t)x, \quad i = 1, 2,$$

其中$E = C[0,\omega]$是一个Banach空间, 范数为$\|x\| = \sup\limits_{t\in[0,\omega]} |x(t)|$且

$$D(L_i) = \{x \in C^1[0,\omega]:\ x(0) = x(\omega)\}, \quad i = 1, 2.$$

因为$\mathrm{Ker}(L_i) = \{c\},\ c \in \mathbb{R}$, 所以算子$L_i$不可逆. 进一步, 令$Lx := x'$, 则由$p_1(t) \equiv 0,\ p_2(t) \equiv 0$可得

$$L = L_i, \quad D(L) = D(L_i), \quad \mathrm{Ker}L = \mathrm{Ker}(L_i) = \{c\}, \qquad i = 1, 2.$$

定理 1.1的证明　令$V = \mathrm{Ker}L$, 则$L^2(0,\omega) = V \oplus V^\perp$, 其中

$$V^\perp = \Big\{y \in L^2(0,\omega) : \int_0^\omega y(t)\mathrm{d}t = 0\Big\}.$$

于是, u和v可重写为

$$u = s + \varphi, \quad s \in V,\ \varphi \in V^\perp;$$
$$v = \rho + \psi, \quad \rho \in V,\ \psi \in V^\perp.$$

由假设(H2)可知(u, v)是系统(1.4)的一个周期解当且仅当(u, v)满足下列方程

$$\varphi'(t) = f(t, s + \varphi(t), \rho + \psi(t)) + c_1(t), \quad t \in (0,\omega), \tag{2.1}$$

$$\varPhi_1(s, \rho, \varphi, \psi) := \int_0^\omega f(\tau, s + \varphi(\tau), \rho + \psi(\tau))\mathrm{d}\tau = 0; \tag{2.2}$$

$$\psi'(t) = g(t, s + \varphi(t), \rho + \psi(t)) + c_2(t), \quad t \in (0,\omega), \tag{2.3}$$

$$\varPhi_2(s, \rho, \varphi, \psi) := \int_0^\omega g(\tau, s + \varphi(\tau), \rho + \psi(\tau))\mathrm{d}\tau = 0. \tag{2.4}$$

由 (2.1)和 (2.3)分别可得

$$\varphi(t) = (L\big|_{V^\perp})^{-1}\big(f(t, s + \varphi(t), \rho + \psi(t)) + c_1(t)\big) =: T_{s,\rho,\psi}(\varphi(t)), \tag{2.5}$$

$$\psi(t) = (L\big|_{V^\perp})^{-1}\big(g(t, s + \varphi(t), \rho + \psi(t)) + c_2(t)\big) =: T_{s,\rho,\varphi}(\psi(t)). \tag{2.6}$$

进一步, 假设(H1)保证了存在常数$M_1 > 0,\ M_2 > 0$, 使得

$$f(t, x, y) \le M_1, \quad g(t, x, y) \le M_2, \qquad \forall (t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

据此并直接应用Schauder不动点定理[19], 不难证明对任意的s和ρ, 方程(2.5)和(2.6)均存在不动点. 假设对于$s = s_*,\ \rho = \rho_*$, 方程(2.5)和(2.6)分别有不动点$\tilde\varphi$和$\tilde\psi$, 这里s_*与ρ_*是某些待定常数. 此外, 容易看到(2.5)的每个可能的解φ 是有界的, 因而存在常数$R_1 > 0$, 使得对满足(2.5)的φ成立$\|\varphi\| \le R_1$. 同理, 存在常数$R_2 > 0$, 使得(2.6)的任一可能解ψ满足$\|\psi\| \le R_2$.

将$\tilde\varphi(t)$和$\tilde\psi(t)$分别代入 (2.2)与 (2.4). 于是, 若我们能够证明存在实数s_0和ρ_0, 使得

$$\varPhi_1(s_0, \rho_0, \tilde\varphi(t), \tilde\psi(t)) = 0, \tag{2.7}$$

$$\varPhi_2(s_0, \rho_0, \tilde\varphi(t), \tilde\psi(t)) = 0, \tag{2.8}$$

则本定理的证明将完成. 事实上, 可取充分大的正常数s_1, 使得$s_1 + \tilde\varphi(t) \ge l_1 > 0$, 进一步由假设(H1)可知

$$f(t, s_1 + \tilde\varphi(t), \rho + \tilde\psi(t)) < 0, \qquad t,\ \rho \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

另一方面, 存在绝对值充分大的常数$s_2 < 0$, 使得$s_2 + \tilde\varphi(t) \le -l_1 < 0$, 从而

$$f(t, s_2 + \tilde\varphi(t), \rho + \tilde\psi(t)) > 0, \qquad t,\ \rho \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

类似地, 可选取常数$\rho_1 > 0$和$\rho_2 < 0$, 它们满足ρ_1与$|\rho_2|$充分大, 且使得

$$\rho_1 + \tilde\psi(t) \ge l_2 > 0, \qquad \rho_2 + \tilde\psi(t) \le -l_2 < 0,$$

相应地, 可得

$$g(t,s+\tilde{\varphi}(t),\rho_1+\tilde{\psi}(t))<0,\qquad t,\ s\in\mathbb{R},\tag{2.11}$$

$$g(t,s+\tilde{\varphi}(t),\rho_2+\tilde{\psi}(t))>0,\qquad t,\ s\in\mathbb{R}.\tag{2.12}$$

令

$$L=\max\big\{\max\{s_1,|s_2|\},\ \max\{\rho_1,|\rho_2|\}\big\}+1,$$
$$G=\{(s,\rho)\in\mathbb{R}^2:|s|<L,\ |\rho|<L\}.$$

定义

$$F_1(s,\rho):=\Phi_1(s,\rho,\tilde{\varphi}(t),\tilde{\psi}(t)),\quad F_2(s,\rho):=\Phi_2(s,\rho,\tilde{\varphi}(t),\tilde{\psi}(t)).$$

则由假设 (H1)易知$F:=(F_1,F_2):\overline{G}\to\mathbb{R}^2$在$\overline{G}$上连续. 此外, 结合(2.9)-(2.12)及$G$的定义, 不难验证$F((s,\rho))\neq\theta=(0,0),\ \forall(s,\rho)\in\partial G$.

下面, 我们将证明引理1.1的条件(i)和(ii)满足. 首先, 若能够证明

$$F_1(-L,\rho)=\Phi_1(-L,\rho,\tilde{\varphi}(t),\tilde{\psi}(t))=\int_0^\omega f(\tau,-L+\tilde{\varphi}(\tau),\rho+\tilde{\psi}(\tau))\mathrm{d}\tau\geq 0\tag{2.13}$$

与

$$F_2(s,-L)=\Phi_2(s,-L,\tilde{\varphi}(t),\tilde{\psi}(t))=\int_0^\omega g(\tau,s+\tilde{\varphi}(\tau),-L+\tilde{\psi}(\tau))\mathrm{d}\tau\geq 0,\tag{2.14}$$

则引理1.1的条件(i)必满足. 事实上, 由算子L的定义可知$-L+\tilde{\varphi}(\tau)\leq s_2+\tilde{\varphi}(\tau)\leq -l_1$, 这结合假设(H1)中的第一个不等式表明(2.13)成立. 进一步, 假设(H1)及$-L+\tilde{\psi}(\tau)\leq\rho_2+\tilde{\psi}(\tau)\leq -l_2$保证了(2.14)亦满足. 通过类似讨论可得

$$F_1(L,\rho)=\Phi_1(L,\rho,\tilde{\varphi}(t),\tilde{\psi}(t))=\int_0^\omega f(\tau,L+\tilde{\varphi}(\tau),\rho+\tilde{\psi}(\tau))\mathrm{d}\tau\leq 0,$$
$$F_2(s,L)=\Phi_2(s,L,\tilde{\varphi}(t),\tilde{\psi}(t))=\int_0^\omega g(\tau,s+\tilde{\varphi}(\tau),L+\tilde{\psi}(\tau))\mathrm{d}\tau\leq 0.$$

于是, 引理1.1的条件(ii)亦成立.

最后, 由引理1.1可知存在$(s_0,\rho_0)\in G$, 使得$F((s_0,\rho_0))=\theta$, 因而(2.7)和(2.8)成立. 令$s_*=s_0,\ \rho_*=\rho_0$, 则定理1.1证毕.

例 2.1 考虑非自治共振系统

$$\begin{cases} u'(t)=(\sin t+2)\frac{-u}{u^2+v^2+1}+\sin t,\\ v'(t)=(\cos t+2)\frac{-v}{u^2+v^2+1}+\cos t.\end{cases}\tag{2.15}$$

显然,

$$p_1(t)\equiv 0,\quad p_2(t)\equiv 0;$$

$c_1(t)=\sin t,\ c_2(t)=\cos t$是关于$t$的2π-周期连续函数, 且满足

$$\int_0^\omega c_1(t)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sin t\mathrm{d}t=0,\qquad\int_0^\omega c_2(t)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\cos t\mathrm{d}t=0.$$

因此, 假设(H2)满足.

另一方面, $f(t,u,v):=(\sin t+2)\frac{-u}{u^2+v^2+1}$于$\mathbb{R}^3$上连续且关于变量$t$是2π-周期的. 进一步, 不难验证

$$|f(t,u,v)|\leq\frac{3}{2},\qquad\forall(t,u,v)\in\mathbb{R}^3,$$

并且对任意正常数l_1, 有

$$f(t,u,v)u=(\sin t+2)\frac{-u^2}{u^2+v^2+1}<0,\qquad |u|\geq l_1.$$

于是, $f(t,u,v)$满足假设(H1). 同理可知

$$g(t,u,v):=(\cos t+2)\frac{-v}{u^2+v^2+1}$$

亦满足假设(H1). 从而由定理1.1可知系统(2.15)至少存在一个周期解.

注 2.1 显然, 非自治共振系统(2.15)并不能由文[5-13]等所采用的研究方法处理, 而且上述存在性结果是新颖的.

3. 相关结果与注记

本节将给出一些相关结果和注记.

推论 3.1 假设(H1)和(H2)成立. 若

$$p_i(t)\equiv 0,\quad c_i(t)\equiv 0,\qquad i=1,2,$$

则系统

$$\begin{cases} u'(t)=f(t,u(t),v(t)),\\ v'(t)=g(t,u(t),v(t)) \end{cases}$$

至少存在一个周期解.

证 类似于定理1.1的证明, 易知结论成立.

考虑如下$n\times n$系统

$$x_i'+p_i(t)x_i=f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)+c_i(t),\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{3.1}$$

假设:

(H1)$'$ $f_i\in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$有界, 且关于变量$t$为$\omega$-周期. 存在正常数$l_i$, 使得对任意$(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, 有

$$f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)x_i<0,\quad |x_i|\geq l_i,\qquad i=1,2,\cdots,n;$$

(H2)$'$ $p_i,c_i\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$是$\omega$-周期函数且满足

$$\int_0^\omega c_i(t)\mathrm{d}t=0,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

定理 3.1 假设 (H1)$'$和 (H2)$'$成立. 若$p_i(t)\equiv 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则系统(3.1)至少存在一个周期解.

证 通过与定理1.1证明中类似的讨论, 可证结论成立.

注 3.1 需要指出的是对于特殊情形

$$c_i(t)\equiv 0,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

定理3.1 的结论仍成立.

注 3.2 本文并未讨论$p_i(t)\not\equiv 0$但$\int_0^\omega p_i(t)\mathrm{d}t=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$的情形, 然而我们相信定理1.1的证明方法完全可以用来处理此情形. 此外, 虽然本文主要讨论时滞函数$\tau(t)\equiv 0$的情形, 但是定理1.1的证明方法对于$\tau(t)\not\equiv 0$的系统仍适用.

参考文献:

[1] CHOW S N. Existence of periodic solutions of autonomous functional differential equations[J]. J. Differential Equations, 1974, 15(1): 350-378.

[2] WAZEWSKA-CZYZEWSKA M, LASOTA A. Mathematical problems of the dynamics of a system of red blood cells[J]. Mat. Stosow., 1976, 6(2): 23-40.

[3] GURNEY W S, BLYTHE S P, NISBET R N. Nicholson's blowflies revisited[J]. Nature, 1980, 287(1): 17-21.

[4] FREEDMAN H I, WU J. Periodic solutions of single-species models with periodic delay[J]. SIAM J. Math. Anal., 1992, 23(3): 689-701.

[5] KUANG Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics[M]. New York: Academic Press, 1993.

[6] MACKEY M C, GLASS L. Oscillations and chaos in physiological control systems[J]. Science, 1997, 197: 287-289.

[7] JIN Z L, WANG H Y. A note on positive periodic solutions of delayed differential equations[J]. Appl. Math. Lett., 2010, 23(5): 581-584.

[8] GRAEF J, KONG L. Existence of multiple periodic solutions for first order functional differential equations[J]. Math. Comput. Modell., 2011, 54(11-12): 2962-2968.

[9] MA R Y, CHEN R P, CHEN T L. Existence of positive periodic solutions of nonlinear first-order delayed differential equations[J]. J. Math. Anal. Appl., 2011, 384(2): 527-535.

[10] MA R Y, LU Y Q. One-signed periodic solutions of first-order functional differential equations with a parameter[J]. Abstr. Appl. Anal., 2011, 2011: 1-11.

[11] WANG H Y. Positive periodic solutions of functional differential systems[J]. J. Differential Equations, 2004, 202(2): 354-366.

[12] WANG H Y. Positive periodic solutions of singular systems of first order ordinary differential equations[J]. Appl. Math. Comput., 2011, 218(5): 1605-1610.

[13] CHEN R P, MA R Y, HE Z Q. Positive periodic solutions of first-order singular systems[J]. Appl. Math. Comput., 2012, 218(23): 11421-11428.

[14] HAN X L. Positive solutions for a three-point boundary value problem at resonance[J]. J. Math. Anal. Appl., 2007, 336(1): 556-568.

[15] MA R Y. Existence results of a m-point boundary value problem at resonance[J]. J. Math. Anal. Appl., 2004, 294(1): 147-157.

[16] GUPTA C. Existence theorems for a second order m-point boundary value problems at resonance[J]. Int. J. Math. Math. Sci., 1995, 18: 705-710.

[17] FENG W Y, WEBB J R L. Solvability of a m-point boundary value problems at resonance[J]. Nonlinear Anal., 1997, 30(6): 3227-3238.

[18] MIRANDA C. Un'osservatione su un teorema di Brouwer[J]. Boll. Un. Mat. Ital., 1940, 3(1): 5-7.

[19] GUO D J, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear Problems in Abstract Cones[M]. Orlando: Academic Press, 1988.

Existence of Periodic Solutions of the First-Order Non-Autonomous Systems at Resonance

CHEN Ruipeng, LI Xiaoya

(*College of Mathematics and Information Science, North Minzu University, Yinchuan 750021, China*)

Abstract: This paper studies the existence of periodic solutions of the first-order non-autonomous systems at resonance, where nonlinear terms are periodic continuous functions. Several new existence results are established by means of Miranda's theorem and Schauder's fixed point theorem. Our results enrich and complement those available in the literature.

Key words: Non-autonomous system; Resonance; Periodic solution; Existence; Miranda's theorem