应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2019, 32(4): 811-819

2-维Ginzburg-Landau方程的一种混合有限元方法的高精度分析

李庆富, 王俊俊
(平顶山学院数学与统计学院, 河南 平顶山 467000)

摘 要： 针对2-维Ginzburg-Landau方程, 采用EQ_1^{rot}非协调元及零阶Raviart-Thomas元讨论了一种混合有限元方法. 在半离散格式和线性化的Euler格式下, 分别有技巧的导出了原始变量u在H^1能量模意义下及流量$\vec{p}$在L^2模意义下的$O(h^2+\tau^2)$阶的超逼近性质. 给出一个数值算例验证了理论结果的正确性.

关键词： 2-维Ginzburg-Landau方程；混合有限元方法；半离散格式；线性化的二阶全离散格式；超逼近结果
中图分类号： O242.21 **AMS(2000)主题分类：** 65N15; 65N30
文献标识码： A **文章编号：** 1001-9847(2019)04-0811-09

1. 引言

考虑如下 2维Ginzburg-Landau方程：

$$\begin{cases} u_t-(a_1+\mathrm{i}b_1)\Delta u+(a_2+\mathrm{i}b_2)|u|^2u-\gamma u=0, & (X,t)\in\Omega\times(0,T], \\ u=0, & (X,t)\in\ \partial\Omega\times(0,T], \\ u(X,0)=u_0(X), & X\in\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$\Omega\subset\mathbb{R}^2$是一个边界为$\partial\Omega$的矩形, $0<T<\infty$, $X=(x,y)$. u为一个复值函数, 且a_1,a_2,b_1,b_2 为某些正实数. u_0是已知复值函数, γ是正的系数.

非线性 Ginzburg-Landau方程的有限元方法被很多学者专家所关注. 例如, 文[1-2]研究了一个非线性耦合形式的Ginzburg-Landau方程, 其中文[1]研究了其半离散和隐式 Euler全离散格式, 文[2]提出了一种线性化的CN格式, 二者都得到了最优误差估计. 文[3]给出了(1.1)有限差分的收敛结果, 避开了数值解的估计, 利用数学归纳法证明了其格式在$L^2(\Omega)$-模下的误差估计. 文[4]针对(1.1)给出了三种线性化的差分格式, 接着研究了该方程的平面波解, 并得到了三个格式的截断误差.

混合有限元方法虽然对空间要求光滑度较低, 并能同时得到原始变量和中间变量数值解等优势, 但需要满足所谓的LBB条件, 这通常不是一件容易的事. 为了降低空间选取的难度, 文[5]对二阶椭圆问题提出了另一种混合元格式. 较传统的混合元格式具有以下特点：当空间满足一个简单的包含关系时离散的LBB条件自动满足, 自由度少且可避免对矢量有限空间的试探函数进行散度运算等. 因此, 该格式已被广泛应用在各种方程中[6-10].

本文借用文[5-10]的思想, 使用五节点元[11-12]及零阶Raviart-Thomas元讨论了2-维Ginzburg-Landau方程的一种新混合有限元方法. 首先给出其半离散的有限元格式, 证明了其解

* **收稿日期：** 2018-09-15
基金项目： 国家自然科学基金 (11671369)
作者简介： 李庆富, 男, 汉族, 河南人, 教授, 研究方向：有限元方法及其应用.

的存在唯一性, 利用导数转移等技巧得到了其在半离散下的超逼近结果. 其次, 给出了其一个线性化的Euler格式, 有技巧的导出了原始变量u在H^1模意义下及流量$\vec{p}$在L^2模意义下的$O(h^2+\tau^2)$阶的超逼近性质. 最后利用一个数值算例验证了理论结果.

2. 单元介绍

令Ω是一个矩形, Γ_h是 Ω的一个正则剖分. 对于一个给定的$K_h\in\Gamma_h$, 记四个顶点和四条边分别为$a_i, i=1\sim 4$ 和$l_i=\overline{a_ia_{i+1}}, i=1\sim 4\ (\mathrm{mod}\ 4)$. 相对应的有限元空间分别定义为 V_h和$\vec{W}_h$:

$$V_h=\{v_h; v_h|_K\in \mathrm{span}\{1,x,y,x^2,y^2\}, \int_F [v_h]\mathrm{d}s=0, F\subset\partial K, \forall K\in\Gamma_h\},$$
$$\vec{W}_h=\{\vec{w}=(w^1,w^2); \vec{w}|_K\in Q_{10}\times Q_{01}, \forall K\in\Gamma_h\},$$

其中, $Q_{ij}=\mathrm{span}\{x^ry^s, 0\le r\le i, 0\le s\le j\}$. $[v_h]$表示跨过单元边界 F的跳跃值, 当 $F\subset\partial\Omega$时, $\int_F v_h\mathrm{d}s=0$. 容易验证, $\|\cdot\|_h=(\sum\limits_{K\in\Gamma_h}|\cdot|_{1,K}^2)^{1/2}$是 V_h上的模. 对于 $u\in H^1(\Omega)$, $\vec{w}\in(H^1(\Omega))^2$, 设 $I_h: H^1(\Omega)\to V_h$和 $\Pi_h:(H^1(\Omega))^2\to\vec{W}_h$ 分别为由 V_h和 $\vec{W}_h$上诱导的插值算子, 满足: $I_h|_K=I_K$, $\Pi_h|_K=\Pi_K$及

$$\begin{cases}\int_{l_i}(u-I_Ku)\mathrm{d}s=0,\ i=1,2,3,4;\\ \frac{1}{|K|}\int_K(u-I_ku)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.\end{cases}$$

和

$$\int_{l_i}(\vec{w}-\Pi_K\vec{w})\cdot\vec{n}\mathrm{d}s=0,\ i=1,2,3,4,$$

其中 $\vec{n}$是对应边 $l_i(i=1,2,3,4)$的单位外法向量. 有以下引理:

引理2.1[12] 对于任意的 $\vec{p}\in(H^2(\Omega))^2$, 有

$$(\vec{p}-\Pi_h\vec{p},\nabla_hv_h)_h=O(h^2)\|\vec{p}\|_2\|\nabla_hv_h\|_0,\quad \forall v_h\in V_h, \tag{2.1}$$
$$\|\nabla\cdot(\vec{p}-\Pi_h\vec{p})\|_0=O(h)\|\nabla\cdot\vec{p}\|_1. \tag{2.2}$$

令 $\vec{p}=\nabla u$, 则 (1.1) 相对应的弱形式是寻找 $\{u,\vec{p}\}:[0,T]\to H_0^1(\Omega)\times(L^2(\Omega))^2$, 使得

$$\begin{cases}(\vec{p},\vec{w})=(\nabla u,\vec{w}),\\ (u_t,v)+(a_1+\mathrm{i}b_1)(\vec{p},\nabla v)+(a_2+\mathrm{i}b_2)(|u|^2u,v)-(\gamma u,v)=0.\end{cases}$$

3. 半离散超逼近结果

寻找 $u_h\in V_h, \vec{p}_h\in\vec{W}_h$, 使得

$$\begin{cases}(\vec{p}_h,\vec{w})=(\nabla u_h,\vec{w})_h,\\ (u_{ht},v)+(a_1+\mathrm{i}b_1)(\vec{p}_h,\nabla v)+(a_2+\mathrm{i}b_2)(|u_h|^2u_h,v)-(\gamma u_h,v)=0.\end{cases} \tag{3.1}$$

定理3.1 问题(3.1) 存在唯一解.

证 设$\{\phi_i\}_{i=1}^{r_1}$和$\{\vec{\psi}_i\}_{i=1}^{r_2}$分别为$V_h$和$\vec{W}_h$上的基, 则有

$$u_h=\sum_{i=1}^{r_1}h_i(t)\phi_i,\quad \vec{p}_h=\sum_{i=1}^{r_2}g_i(t)\vec{\psi}_i.$$

在 (3.1) 选择$v_h=\phi_j, \vec{w}_h=\vec{\psi}_j$, 则有

$$\begin{cases}BG(t)=AH(t),\\ M\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}+(a_1+\mathrm{i}b_1)NG(t)+(a_2+\mathrm{i}b_2)EH(t)-\gamma DH(t)=0,\end{cases} \tag{3.2}$$

其中

$$A=[(\vec{\psi}_i,\nabla\phi_j)]_{r_1\times r_2}, B=[(\vec{\psi}_i,\vec{\psi}_j)]_{r_2\times r_2}, M=[(\phi_i,\phi_j)]_{r_1\times r_1}, N=[(\nabla\phi_i,\vec{\psi}_j)]_{r_2\times r_1},$$

$$E=[((|\sum_{i=1}^{r_1}h_i(t)\phi_i|^2)\phi_i,\phi_j)]_{r_1\times r_1},D=[(\phi_i,\phi_j)]_{r_1\times r_1},H(t)=[h_i(t)]_{r_1\times 1},G(t)=[g_i(t)]_{r_2\times 1}.$$

由于B是正定矩阵, 则对$t\in(0,T]$, (3.1) 存在唯一解.

令

$$u-u_h=(u-I_hu)+(I_hu-u_h)\triangleq\eta+\xi,\vec{p}-\vec{p}_h=(\vec{p}-\varPi_h\vec{p})+(\varPi_h\vec{p}-\vec{p}_h)\triangleq r+\theta. \tag{3.3}$$

假设$(\star)$　$\|u_h\|_{0,\infty}<1$.

定理3.2　令u和u_h分别为(1.1) 和(3.1) 的解, 若$u\in H^3(\varOmega),\vec{p}\in(H^2(\varOmega))^2$, 我们有

$$\|I_hu-u_h\|_h+\|\varPi_h\vec{p}-\vec{p}_h\|_0=O(h^2). \tag{3.4}$$

证　由(3.1)和(1.1)我们有误差方程:

$$\begin{cases}(\vec{\theta},\vec{w}_h)-(\nabla_h\xi,\vec{w}_h)_h=-(\vec{r},\vec{w}_h)+(\nabla_h\eta,\vec{w}_h)_h,\\(\xi_t,v_h)+(a_1+\mathrm{i}b_1)(\vec{\theta},\nabla_hv_h)_h=-(\eta_t,v_h)-(a_1+\mathrm{i}b_1)(\vec{r},\nabla_hv_h)_h+\sum\limits_{K_h}\int_{\partial K_h}\vec{p}\cdot\vec{n}\cdot v_h\\-(a_2+\mathrm{i}b_2)(|u|^2u-|u_h|^2u_h,v_h)+\gamma(\xi,v_h)+\gamma(\eta,v_h).\end{cases} \tag{3.5}$$

将其改写为

$$\begin{cases}(a_1^2+b_1^2)(\vec{\theta},\vec{w}_h)-(a_1^2+b_1^2)(\nabla_h\xi,\vec{w}_h)_h=-(a_1^2+b_1^2)(\vec{r},\vec{w}_h)+(a_1^2+b_1^2)(\nabla_h\eta,\vec{w}_h)_h,\\(a_1-\mathrm{i}b_1)(\xi_t,v_h)+(a_1^2+b_1^2)(\vec{\theta},\nabla_hv_h)_h=-(a_1-\mathrm{i}b_1)(\eta_t,v_h)-(a_1^2+b_1^2)(\vec{r},\nabla_hv_h)_h\\+(a_1^2+b_1^2)\sum\limits_{K_h}\int_{\partial K_h}\vec{p}\cdot\vec{n}v_h-(a_1-\mathrm{i}b_1)(a_2+\mathrm{i}b_2)(|u|^2u-|u_h|^2u_h,v_h)\\+(a_1-\mathrm{i}b_1)\gamma(\xi,v_h)+\gamma(\eta,v_h).\end{cases} \tag{3.6}$$

在(3.6)的第一式中令$\vec{w}_h=\nabla\xi_t$, 在第二式中令$v_h=\xi_t$, 两式相加, 取其实部有

$$\begin{aligned}a_1\|\xi_t\|_0^2+\frac{(a_1^2+b_1^2)}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi\|_h^2=&-\mathrm{Re}(a_1^2+b_1^2)(\nabla_h\eta,\nabla_h\xi_t)_h-\mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)(\eta_t,\xi_t)\\&+\mathrm{Re}(a_1^2+b_1^2)\sum_{K_h}\int_{\partial K_h}\vec{p}\cdot\vec{n}\xi_t\\&-\mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)(a_2+\mathrm{i}b_2)(|u|^2u-|u_h|^2u_h,\xi_t)\\&+\mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)\gamma(\xi,\xi_t)+\mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)\gamma(\eta,\xi_t).\end{aligned} \tag{3.7}$$

显然有

$$\begin{aligned}&-\mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)(\eta_t,\xi_t)+\mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)\gamma(\xi,\xi_t)+\mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)\gamma(\eta,\xi_t)\\&\le Ch^4+C\|\xi\|_h^2+\frac{a_1}{8}\|\xi_t\|_0^2,\\&(\nabla_h\eta,\nabla_h\xi_t)_h=0.\end{aligned} \tag{3.8}$$

由假设得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)(a_2+\mathrm{i}b_2)(|u|^2u-|u_h|^2u_h,\xi_t)\\&=\mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)(a_2+\mathrm{i}b_2)(|u_h|^2(\xi+\eta),\xi_t)+\mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)(a_2+\mathrm{i}b_2)(u(|u|^2-|u_h|^2),\xi_t)\\&\le C(\|\xi\|_0+\|\eta\|_0)\|\xi_t\|_0\le Ch^4+C\|\xi\|_h^2+\frac{a_1}{4}\|\xi_t\|_0^2.\end{aligned} \tag{3.9}$$

利用导数转移以及文[12]的结论有

$$\mathrm{Re}(a_1^2+b_1^2)\sum_{K_h}\int_{\partial K_h}\vec{p}\cdot\vec{n}\cdot\xi_t\ =\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}(a_1^2+b_1^2)\sum_{K_h}\int_{\partial K_h}\vec{p}\cdot\vec{n}\cdot\xi-\mathrm{Re}(a_1^2+b_1^2)\sum_{K_h}\int_{\partial K_h}\vec{p}_t\cdot\vec{n}\cdot\xi$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}(a_1^2+b_1^2)\sum_{K_h}\int_{\partial K_h}\vec{p}\cdot\vec{n}\xi + Ch^2\|\vec{p}_t\|_2\|\xi\|_h \\
&\leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}(a_1^2+b_1^2)\sum_{K_h}\int_{\partial K_h}\vec{p}\cdot\vec{n}\xi + Ch^4 + C\|\xi\|_h^2. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

综合以上误差, 代入(3.7)有

$$
\|\xi_t\|_0^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi\|_h^2 \leq Ch^4 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}(a_1^2+b_1^2)\sum_{K_h}\int_{\partial K_h}\vec{p}\cdot\vec{n}\cdot\xi + C\|\xi\|_h^2. \qquad (3.11)
$$

由于$\xi(0)=0$, 两端关于t 从 0 到t 做积分有

$$
\int_0^t\|\xi_t\|_0^2 + \|\xi\|_h^2 \leq Ch^4 + \mathrm{Re}(a_1^2+b_1^2)\sum_{K_h}\int_{\partial K_h}\vec{p}\cdot\vec{n}\cdot\xi + C\int_0^t\|\xi\|_h^2. \qquad (3.12)
$$

利用Gronwall不等式得到

$$
\begin{aligned}
\int_0^t\|\xi_t\|_0^2 + \|\xi\|_h^2 \ &\leq Ch^4 + \mathrm{Re}(a_1^2+b_1^2)\sum_{K_h}\int_{\partial K_h}\vec{p}\cdot\vec{n}\cdot\xi \\
&\leq Ch^4 + Ch^2\|\vec{p}\|_2\|\xi\|_h \leq Ch^4 + \frac{1}{2}\|\xi\|_h^2, \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

则有

$$
\|\xi\|_h \leq Ch^2. \qquad (3.14)
$$

在 (3.6) 中令$\vec{w}_h=\vec{\theta}$

$$
\|\vec{\theta}\|_0^2 = (\nabla_h\xi,\vec{\theta})_h - (\vec{r},\vec{\theta}) + (\nabla_h\eta,\vec{\theta})_h \leq Ch^4 + \frac{1}{2}\|\vec{\theta}\|_0^2, \qquad (3.15)
$$

也即

$$
\|\vec{\theta}\|_0 \leq Ch^2. \qquad (3.16)
$$

最后需要说明先验假设($\star$)的正确性. 首先, 记$\delta(t)\triangleq\nabla(u(t)-u_h(t))$. 有初始逼近和插值理论可知$\|\delta(0)\|_{0,\infty}<1$成立. 由函数的连续性, 在$t=0$的一个小领域$[0,\varepsilon]$内, 定理3.2成立.

如果假设不再整个区间$I=[0,T]$上成立, 设$t_0=\inf\{t:\|\delta(t)\|_{0,\infty}\geq 1, t\in I\}$, 则有$\|\delta(t_0)\|_{0,\infty}=1, t_0>0$(事实上,若$\|\delta(t_0)\|_{0,\infty}>1$, 由函数的连续性, 总可以找到一个点$t_1<t_0$, 使得$\|\delta(t_1)\|_{0,\infty}=1$此时记$t_1$为$t_0$). 此时假设($\star$)在$[0,t_0)$成立.

由定理3.2的证明过程可以看出其结论在$[0,t_0]$处成立, 则由逆不等式, 对于充分小的h, 有$\|\delta(t)\|_{0,\infty}\leq\|\nabla(u(t)-I_hu(t))\|_{0,\infty}+\|\nabla(I_hu(t)-u_h(t))\|_{0,\infty}\leq Ch\|u\|_{2,\infty}+Ch^{-1}\|\nabla(I_hu(t)-u_h(t))\|_0\leq Ch, t\in[0,t_0]$. 选择适当的$h_0$, 当$h\leq h_0$, 有$\|\delta(t)\|_{0,\infty}\leq Ch<1, t\in[0,t_0]$. 此与$\|\delta(t_0)\|_{0,\infty}=1$矛盾. 所以先验假设($\star$)是正确的.

注3.1 由于(3.7)左端没有关于$\|\xi_t\|_h$ 的项存在, 则在估计项$\sum\limits_{K_h}\int_{\partial K_h}\vec{p}\cdot\vec{n}\cdot\xi_t$的时候, 对(3.10)进行导数转移, 将关于$t$ 的导数从ξ 上转移到$\vec{p}$上, 最终得到关于$\|\xi\|_h$的估计.

4. 线性化逼近格式

令 $\{t_n: t_n=n\tau; 0\leq n\leq N\}$是 $[0,T]$上的均匀剖分, 时间步长是 $\tau=T/N$, 记$\sigma^n=\sigma(X,t_n), 0\leq n\leq N$, 定义: $\bar{\partial}_t\sigma^n=\frac{\sigma^n-\sigma^{n-1}}{\tau}$, 利用 [14] 线性化的有限元方法, 寻找 $U_h^n\in V_h, \vec{P}_h^n\in\vec{W}_h$, 使得当 $n\geq 1$ 时, 有

$$
\begin{cases}
(\vec{P}_h^n,\vec{w}_h)=(\nabla_hU_h^n,\vec{w}_h)_h, \\
(\bar{\partial}_tU_h^n,v_h)+(a_1+\mathrm{i}b_1)(\vec{P}_h^n,\nabla_hv_h)_h+(a_2+\mathrm{i}b_2)(|U_h^{n-1}|^2U_h^n,v_h)-(\gamma U_h^n,v_h)=0, \\
U_h^0=I_hu_0(X).
\end{cases} \qquad (4.1)
$$

令

$$u^i-U_h^i=(u^i-I_hu^i)+(I_hu^i-U_h^i)\triangleq\eta^i+\xi^i,$$
$$\vec{p}^i-\vec{P}_h^i=(\vec{p}^i-\Pi_h\vec{p}^i)+(\Pi_h\vec{p}^i-\vec{P}_h^i)\triangleq\vec{r}^i+\vec{\theta}^i, i=0,1,2,\ldots,N. \tag{4.2}$$

定理4.1　设$\vec{u}$和$\vec{U}_h^m$分别为(1.1) 和(4.1) 的解, 对任意的$m=1,2,\ldots,N$, 若$u^m\in H^3(\Omega),\vec{p}^m\in(H^2(\Omega))^2$, 有

$$\|\xi^n\|_h+\|\vec{\theta}^n\|_0=O(h^2+\tau). \tag{4.3}$$

证　得到误差方程

$$\begin{cases}(\vec{\theta}^1,\vec{w}_h)-(\nabla_h\xi^1,\vec{w}_h)_h=-(\vec{r}^1,\vec{w}_h)+(\nabla_h\eta^1,\vec{w}_h)_h,\\ (\frac{\xi^1}{\tau},v_h)+(a_1+\mathrm{i}b_1)(\vec{\theta}^1,\nabla_hv_h)_h=-(\frac{\eta^1-\eta^0}{\tau},v_h)-(a_1+\mathrm{i}b_1)(\vec{r}^1,\nabla_hv_h)_h\\ \qquad+(a_1+\mathrm{i}b_1)\sum\limits_K\int_{\partial K}\vec{p}^1\cdot\vec{n}\cdot v_h-(a_2+\mathrm{i}b_2)(|u^0|^2u^1-|U_h^0|^2U_h^1,v_h)\\ \qquad+\gamma(\xi^1,v_h)+\gamma(\eta^1,v_h)+(S_1,v_h)+(S_2,v_h),\end{cases} \tag{4.4}$$

其中$S_1=\bar{\partial}_tu-u^1,S_2=-(a_2+\mathrm{i}b_2)(|u^0|^2u^1-|u^1|^2u^1)$. 令$K\triangleq1+\sum\limits_{1\le i\le N}\sum\limits_{K_h}\|\nabla I_hu^i\|_{0,\infty,K_h}$.

一方面, 在(4.4)中, 选取$v_h=\frac{\xi^1}{\tau},\vec{w}_h=\frac{\nabla\xi^1}{\tau}$, 两式相加有

$$\begin{aligned}\|\frac{\xi^1}{\tau}\|_0^2+\frac{a_1}{\tau}\|\xi^1\|_h^2=&-\mathrm{Re}(\frac{\eta^1-\eta^0}{\tau},\frac{\xi^1}{\tau})-\mathrm{Re}(a_1+\mathrm{i}b_1)(\nabla_h\eta^1,\frac{\nabla_h\xi^1}{\tau})_h\\ &-\mathrm{Re}(a_2+\mathrm{i}b_2)(|u^0|^2u^1-|U_h^0|^2U_h^1,\frac{\xi^1}{\tau})+\mathrm{Re}(a_1+\mathrm{i}b_1)\sum_{K_h}\int_{\partial K_h}\vec{p}^1\cdot\vec{n}\cdot\frac{\xi^1}{\tau}\\ &+\mathrm{Re}\gamma(\xi^1,\frac{\xi^1}{\tau})+\mathrm{Re}\gamma(\eta^1,\frac{\xi^1}{\tau})+\mathrm{Re}(S_1,\frac{\xi^1}{\tau})+\mathrm{Re}(S_2,\frac{\xi^1}{\tau}).\end{aligned}$$

显然有

$$\begin{aligned}&-\mathrm{Re}(\frac{\eta^1-\eta^0}{\tau},\frac{\xi^1}{\tau})+\mathrm{Re}(a_1+\mathrm{i}b_1)\sum_{K_h}\int_{\partial K_h}\vec{p}^1\cdot\vec{n}\cdot\frac{\xi^1}{\tau}+\mathrm{Re}\gamma(\xi^1,\frac{\xi^1}{\tau})\\ &+\mathrm{Re}\gamma(\eta^1,\frac{\xi^1}{\tau})+\mathrm{Re}(S_1,\frac{\xi^1}{\tau})+\mathrm{Re}(S_2,\frac{\xi^1}{\tau})\\ &\le\frac{Ch^4}{\tau}+Ch^4+C\tau^2+C\|\xi^1\|_0^2+\frac{1}{8}\|\frac{\xi^1}{\tau}\|_0^2+\frac{a_1}{8\tau}\|\xi^1\|_h^2.\end{aligned}$$

由文[13]的高精度结果可以看到

$$\mathrm{Re}(a_1+\mathrm{i}b_1)(\nabla_h\eta^1,\frac{\nabla_h\xi^1}{\tau})_h=0.$$

又由于

$$\begin{aligned}&-\mathrm{Re}(a_2+\mathrm{i}b_2)(|u^0|^2u^1-|U_h^0|^2U_h^1,\frac{\xi^1}{\tau})=-\mathrm{Re}(a_2+\mathrm{i}b_2)(|U_h^0|^2(\xi^1+\eta^1),\frac{\xi^1}{\tau}),\\ &-\mathrm{Re}(a_2+\mathrm{i}b_2)(u^1(|u^0|^2-|U_h^0|^2),\frac{\xi^1}{\tau})\le Ch^4+C\|\xi^1\|_0^2+\frac{1}{8}\|\frac{\xi^1}{\tau}\|_0^2,\end{aligned}$$

则有

$$\|\frac{\xi^1}{\tau}\|_0^2+\frac{a_1}{\tau}\|\xi^1\|_h^2\le\frac{Ch^4}{\tau}+Ch^4+C\tau^2+C\|\xi^1\|_0^2+\frac{1}{4}\|\frac{\xi^1}{\tau}\|_0^2+\frac{a_1}{8\tau}\|\xi^1\|_h^2,$$

也就是

$$\sqrt{\tau}\|\frac{\xi^1}{\tau}\|_0+\|\xi^1\|_h\le Ch^2+C\tau.$$

另一方面, 在(4.4)的第一个式子中, 选取$\vec{w}_h=\vec{\theta}^1$有

$$\|\vec{\theta}^1\|_0^2=(\nabla_h\xi^1,\vec{\theta}^1)_h-(\vec{r}^1,\vec{\theta}^1)+(\nabla_h\eta^1,\vec{\theta}^1)_h\le Ch^4+C\|\xi^1\|_h^2+\frac{1}{2}\|\vec{\theta}^1\|_0^2.$$

因此, 存在τ_1, h_1, C_1, 使得当$\tau \le \tau_1$, 有

$$\|\xi^1\|_h + \|\vec{\theta}^1\|_0 \le C_1(h^2+\tau). \tag{4.5}$$

由条件$\tau = O(h^2)$得到

$$\sum_{K_h} \|\nabla U_h^1\|_{0,\infty,K_h} \le \sum_{K_h} \|\nabla \xi^1\|_{0,\infty,K_h} + \sum_{K_h} \|\nabla I_h u^1\|_{0,\infty,K_h} \le CC_3 h + \sum_{K_h} \|\nabla I_h u^1\|_{0,\infty,K_h} \le K, \tag{4.6}$$

其中$h \le h_2 \le 1/CC_2$.

假设(4.3)对于$m \le n-1$成立, 由于$\tau = O(h^2)$, 则存在h_3, 有

$$\begin{aligned}\sum_{K_h} \|\nabla U_h^m\|_{0,\infty} &\le Ch^{-1} \sum_{K_h} \|\nabla (U_h^m - I_h u^m)\|_0 + \sum_{K_h} \|\nabla I_h u^m\|_{0,\infty} \\ &\le CC_0 h + \sum_{K_h} \|\nabla I_h u^m\|_{0,\infty} \le K,\end{aligned} \tag{4.7}$$

其中$h \le h_3 = 1/CC_0$.

下面我们证明结果对于$m=n$也成立. 由(1.1)和(4.1),

$$\begin{cases}(\vec{\theta}^n, \vec{w}_h) = -(\vec{r}^n, \vec{w}_h) + (\nabla_h \xi^n, \vec{w}_h)_h + (\nabla_h \eta^n, \vec{w}_h)_h \\ (\bar{\partial}_t \xi^n, v_h) + ((a_1+\mathrm{i}b_1)\vec{\theta}^n, \nabla_h v_h)_h - (\gamma \xi^n, v_h) = -(\bar{\partial}_t \eta^n, v_h) - ((a_1+\mathrm{i}b_1)\vec{r}^n, \nabla_h v_h)_h \\ \qquad +(a_1+\mathrm{i}b_1)\sum\limits_{K_h}\int_{\partial K_h} \vec{p}^n \cdot \vec{n} \cdot v_h - (a_2+\mathrm{i}b_2)(|u^{n-1}|^2 u^n - |U_h^{n-1}|^2 U_h^n, v_h) \\ \qquad +(\gamma \eta^n, v_h) + (R_1^n, v_h) + (R_2^n, v_h).\end{cases}$$

将其变形后有

$$\begin{cases}(a_1^2+b_1^2)(\vec{\theta}^n, \vec{w}_h)_h - (a_1^2+b_1^2)(\nabla_h \xi^n, \vec{w}_h)_h = -(a_1^2+b_1^2)(\vec{r}^n, \vec{w})_h + (a_1^2+b_1^2)(\nabla_h \eta^n, \vec{w})_h \\ (a_1-\mathrm{i}b_1)(\bar{\partial}_t \xi^n, v_h) + (a_1^2+b_1^2)(\vec{\theta}^n, \nabla_h v_h)_h = -(a_1-\mathrm{i}b_1)(\bar{\partial}_t \eta^n, v_h)_h - (a_1^2+b_1^2)(\vec{r}^n, \nabla_h v)_h \\ \qquad +(a_1^2+b_1^2)\sum\limits_{K_h}\int_{\partial K_h} \vec{p}^n \cdot \vec{n} \cdot v_h - (a_1-\mathrm{i}b_1)(a_2+\mathrm{i}b_2)(|u^{n-1}|^2 u^n - |U_h^{n-1}|^2 U_h^n, v_h) \\ \qquad +(a_1-\mathrm{i}b_1)(\gamma \xi^n, v_h) + (a_1-\mathrm{i}b_1)(\gamma \eta^n, v_h) + (R_1^n, v_h) + (R_2^n, v_h).\end{cases}$$

令$v_h = \bar{\partial}_t \xi^n$, $\vec{w}_h = \bar{\partial}_t \nabla \xi^n$, 将两式相加, 取实部则有

$$\begin{aligned}&a_1\|\bar{\partial}_t \xi^n\|_0^2 + \frac{(a_1^2+b_1^2)}{2\tau}(\|\xi^n\|_h^2 - \|\xi^{n-1}\|_h^2) \\ =& -\mathrm{Re}(a_1^2+b_1^2)(\nabla \eta^n, \bar{\partial}_t \nabla \xi^n) - \mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)(\bar{\partial}_t \eta^n, \bar{\partial}_t \xi^n) + \mathrm{Re}(a_1^2+b_1^2)\sum_{K_h}\int_{\partial K_h} \vec{p}^n \cdot \vec{n} \cdot \bar{\partial}_t \xi^n \\ &- \mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)(a_2+\mathrm{i}b_2)(|u^{n-1}|^2 u^n - |U_h^{n-1}|^2 U_h^n, \bar{\partial}_t \xi^n) + \mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)(\gamma \xi^n, \bar{\partial}_t \xi^n) \\ &+ \mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)(\gamma \eta^n, \bar{\partial}_t \xi^n) + \mathrm{Re}(R_1^n, \bar{\partial}_t \xi^n) + \mathrm{Re}(R_2^n, \bar{\partial}_t \xi^n) \triangleq \sum_{i=1}^{8} B_i.\end{aligned} \tag{4.8}$$

类似ξ^1的证明有

$$B_1 = 0, \quad B_2 + B_5 + B_6 + B_7 + B_8 \le Ch^4 + C\tau^2 + C\|\xi^n\|_0^2 + \frac{a_1}{8}\|\bar{\partial}_t \xi^n\|_0^2.$$

改写B_4, 再估计有

$$\begin{aligned}B_4 =& -\mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)(a_2+\mathrm{i}b_2)(|U_h^{n-1}|^2(\xi^n+\eta^n), \bar{\partial}_t \xi^n) \\ &- \mathrm{Re}(a_1-\mathrm{i}b_1)(a_2+\mathrm{i}b_2)(u^n(|u^{n-1}|^2 - |U_h^{n-1}|^2), \bar{\partial}_t \xi^n) \\ \le& Ch^4 + C\|\xi^n\|_0^2 + C\|\xi^{n-1}\|_0^2 + \frac{a_1}{4}\|\bar{\partial}_t \xi^n\|_0^2.\end{aligned} \tag{4.9}$$

若直接类似于(3.10)的证明, 则会有$B_3 \le Ch^2\|\vec{p}^n\|_2\|\bar{\partial}_t\xi^n\|_h$, 而左边并没有$\|\bar{\partial}_t\xi^n\|_h$, 这将会导致整个结果降阶, 为了避免这类情况, 改写B_3, 有

$$\begin{aligned} B_3 &= \mathrm{Re}\bar{\partial}_t\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}^n\cdot\vec{n}\cdot\xi^n - \mathrm{Re}\sum_K\int_{\partial K}\bar{\partial}_t\vec{p}^n\cdot\vec{n}\cdot\xi^{n-1} \\ &\le \mathrm{Re}\bar{\partial}_t\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}^n\cdot\vec{n}\cdot\xi^n + Ch^2\|\bar{\partial}_t\vec{p}^n\|_2\|\xi^{n-1}\|_h \\ &\le \mathrm{Re}\bar{\partial}_t\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}^n\cdot\vec{n}\cdot\xi^n + Ch^4 + C\|\xi^{n-1}\|_h^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

总结以上的误差结果, 对(4.8)从2到n求和, 则有

$$\begin{aligned} \tau\sum_{i=2}^n\|\bar{\partial}_t\xi^i\|_0^2 + \|\xi^n\|_h^2 \le& Ch^4 + C\tau^2 + \|\xi^1\|_h^2 + C\tau\sum_{i=1}^n\|\xi^i\|_h^2 + \mathrm{Re}\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}^n\cdot\vec{n}\cdot\xi^n \\ &- \mathrm{Re}\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}^1\cdot\vec{n}\cdot\xi^1 \\ \le& Ch^4 + C\tau^2 + \|\xi^1\|_h^2 + C\tau\sum_{i=1}^n\|\xi^i\|_h^2 + \frac{1}{4}\|\xi^n\|_h^2. \end{aligned}$$

利用离散的Gronwall不等式, 有

$$\tau\sum_{i=2}^n\|\bar{\partial}_t\xi^i\|_0^2 + \|\xi^n\|_h^2 \le Ch^4 + C\tau^2. \tag{4.11}$$

又由于令$\vec{w} = \vec{\theta}^n$

$$\|\vec{\theta}^n\|_0^2 = -(\vec{r}^n, \vec{\theta}^n) + (\nabla\xi^n, \vec{\theta}^n) + (\nabla\eta^n, \vec{\theta}^n) \le Ch^4 + \|\xi^n\|_h^2 + \frac{1}{2}\|\vec{\theta}^n\|_0^2,$$

则存在τ_4, h_5, C_4, 使得当$\tau \le \tau_4$有

$$\|\xi^n\|_h + \|\vec{\theta}^n\|_0 \le C_4(h^2 + \tau).$$

由条件$\tau = O(h^2)$, 也有

$$\begin{aligned} \sum_{K_h}\|U_h^n\|_{0,\infty} &\le \sum_{K_h}\|U_h^n - I_hu^n\|_{0,\infty} + \sum_{K_h}\|I_hu^n\|_{0,\infty} \\ &\le Ch^{-1}\sum_{K_h}\|U_h^n - I_hu^n\|_0 + \sum_{K_h}\|I_hu^n\|_{0,\infty} \\ &\le CC_0h + \sum_{K_h}\|I_hu^n\|_{0,\infty} \le K, \end{aligned} \tag{4.12}$$

其中$h \le h_5 \le 1/CC_4$. 可以看到C_4和C_0'没有任何关系, 当取$C_0' \ge \sum\limits_{i=3}^4 C_i$, $\tau_0' \le \min\limits_{3\le i\le 4}\tau_i$和$h_0' \le \min\limits_{4\le i\le 5} h_i$则(4.15) 对$m = n$成立. 至此数学归纳法结束, 定理证毕.

注4.1 由于文中采用了线性化的全离散格式, 当时时刻的时间层分析需要用到上一时刻时间层的结论, 因此选择数学归纳法进行证明. 为了每一个时间层的结果到最后都应该由一个统一的系数来控制, 在证明第n层结果时, 需要利用(4.7), 而不能直接利用带有C_0的归纳假设结果.

注4.2 由于(4.8)左端没有关于$\bar{\partial}_t\xi^n$的项, 则对于B_3来说, 直接估计就会降低最后结果的阶, 利用一个分列技巧将τ从内积的一端转向另一端, 回避出现项$\bar{\partial}_t\xi^n$, 从而得到最后结果.

5. 数值算例

在这一章里, 给出一个算例来验证理论部分. 考虑 (1.1), 其中, $\Omega=[0,1]\times[0,1]$, $a_1=a_2=b_1=b_2=1$, 真解为$u=\mathrm{e}^t xy(1-x)(1-y)$. 在表格5.1-5.8中, 选择$\tau=5h$时刻$t=0.25,0.5,0.75,1.0$ 来分别验证试验结果. 可以看到当$h\to 0$时, $\|u^n-U_h^n\|_h, \|\vec{p}^n-\vec{P}_h^n\|_0$有最优估计阶$O(h)$, $\|I_hu^n-U_h^n\|_h, \|\Pi_h\vec{p}^n-\vec{P}_h^n\|_0$最优估计阶$O(h^2)$, 可以看到所有结果验证了前面理论部分.

表 5.1 数值解U_h^n在$t=0.25$的结果

$m\times m$	$\|u^n-U_h^n\|_h$	阶	$\|U_h^n-I_hu^n\|_h$	阶
4×4	0.03392078977942	—	0.00793104277454	—
8×8	0.01699842162614	0.9968	0.00198319675994	1.9997
16×16	0.00850369358961	0.9992	0.00049571152568	2.0003

表 5.2 数值解U_h^n在$t=0.5$的结果

$m\times m$	$\|u^n-U_h^n\|_h$	阶	$\|U_h^n-I_hu^n\|_h$	阶
4×4	0.03390791562092	—	0.00787579849842	—
8×8	0.01699873085321	0.9962	0.00198584546944	1.9877
16×16	0.00850379118081	0.9992	0.00049738284803	1.9973

表 5.3 数值解U_h^n在$t=0.75$的结果

$m\times m$	$\|u^n-U_h^n\|_h$	阶	$\|U_h^n-I_hu^n\|_h$	阶
4×4	0.03390784678853	—	0.00787550214695	—
8×8	0.01699871089845	0.9962	0.00198567465052	1.9877
16×16	0.00850378948170	0.9992	0.00049735379746	1.9973

表 5.4 数值解U_h^n在$t=1.0$的结果

$m\times m$	$\|u^n-U_h^n\|_h$	阶	$\|U_h^n-I_hu^n\|_h$	阶
4×4	0.03390784978967	—	0.00787551506831	—
8×8	0.01699871081323	0.9962	0.00198567392102	1.9877
16×16	0.00850378946111	0.9992	0.00049735344533	1.9973

表 5.5 数值解$\vec{P}_h^n$在$t=0.25$的结果

$m\times m$	$\|\vec{p}^n-\vec{P}_h^n\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}$	阶	$\|\Pi_h\vec{p}^n-\vec{P}_h^n\|_0$	阶
4×4	0.03378079483080	—	0.00748816766348	—
8×8	0.01698575787882	0.9919	0.00191969829692	1.9637
16×16	0.00850227630890	0.9984	0.00048302136361	1.9907

表 5.6 数值解$\vec{P}_h^n$在$t=0.5$的结果

$m\times m$	$\|\vec{p}^n-\vec{P}_h^n\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}$	阶	$\|\Pi_h\vec{p}^n-\vec{P}_h^n\|_0$	阶
4×4	0.03376858013758	—	0.00743287024398	—
8×8	0.01698605210408	0.9913	0.00192229990270	1.9511
16×16	0.00850236919353	0.9984	0.00048465359581	1.9878

表 5.7 数值解$\vec{P}_h^n$在$t=0.75$的结果

$m\times m$	$\|\vec{p}^n-\vec{P}_h^n\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}$	阶	$\|\Pi_h\vec{p}^n-\vec{P}_h^n\|_0$	阶
4×4	0.03376851491266	—	0.00743257391232	—
8×8	0.01698603311508	0.9913	0.00192213210266	1.9512
16×16	0.00850236757636	0.9984	0.00048462522470	1.9878

表 5.8　数值解$\vec{P}_h^n$在$t=1.0$的结果

$m\times m$	$\Vert\vec{p}^n-\vec{P}_h^n\Vert_{H(\mathrm{div};\Omega)}$	阶	$\Vert\Pi_h\vec{p}^n-\vec{P}_h^n\Vert_0$	阶
4×4	0.03376851775874	—	0.00743258684292	—
8×8	0.01698603303400	0.9913	0.00192213138609	1.9512
16×16	0.00850236755676	0.9984	0.00048462488080	1.9878

参考文献:

[1] DU Q. Finite element methods for the time-dependent Ginzburg-Landau model of superconductivity[J]. Comput. Math. Appl., 1994, 27(12): 119-133.

[2] MU M, HUANG Y. An alternating Crank-Nicolson method for decoupling the Ginzburg-Landau equations[J]. SIAM J. Numer. Anal, 1998, 35(5): 1740-1761.

[3] WANG T, GUO B. Analysis of some finite difference schemes for two-dimensional Ginzburg-Landau equation[J]. Numer. Methods Partial Differential Equations, 2011, 27(5): 1340-1363.

[4] XU Q, CHANG Q. Difference methods for computing the Ginzburg-Landau equation in two dimensions[J]. Numer. Methods Partial Differential Equations, 2011, 27(3): 507-528.

[5] 陈绍春, 陈红如. 二阶椭圆问题新的混合元格式[J]. 计算数学, 2010, 32: 213-218.

[6] 史峰, 于佳平, 李开泰. 椭圆方程的一种新型混合有限元格式[J]. 工程数学学报, 2011, 28: 231-237.

[7] 石东洋, 李明浩. 二阶椭圆问题一种新格式的高精度分析[J]. 应用数学学报, 2014, 37: 45-58.

[8] 石东洋, 张亚东. 椭圆型方程一个新的非协调混合元超收敛分析与外推[J]. 计算数学, 2013, 35: 337-352.

[9] 史艳华, 石东洋. Sobolev方程新混合元方法的高精度分析[J]. 系统科学与数学, 2014, 34: 452-463.

[10] SHI D Y, ZHANG Y D. High accuracy analysis of a new nonconforming mixed finite element scheme for Sobolev equations[J]. Appl. Math. Comput., 2011, 218: 3176-3186.

[11] LIN Q, TOBISKA L, ZHOU A H. Superconvergence and extrapolation of nonconformimg low order finite elements applied to the poisson equation[J]. IMA J. Numer. Anal., 2005, 25(1): 160-181.

[12] SHI D Y, MAO S P, CHEN S C. An anisotropic nonconforming finite element with some superconvergence results[J]. J. Comput. Math., 2005, 23(3): 261-274.

[13] LIN Q, LIN J F. Finite Element Methods: Accuracy and Improvement[M]. Beijing: Science Press, 2006.

[14] THOMÉE V. Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems[M]. Sweden: Springer series in Computational Mathematics, 2000.

Superconvergence Analysis of a Mixed Finite Element Method for Two-Dimension Ginzburg-Landau Equations

LI Qingfu, WANG Junjun

(*School of Mathematics and Statistics, Pingdingshan University, Pingdingshan 467000, China*)

Abstract: EQ_1^{rot} finite element and zero order Raviart-Thomas element are applied to discuss a kind of mixed finite element method(MFEM) for the two-dimension Ginzburg-Landau equations. The superclose results of original variant u in H^1-norm and flux variant $H(\mathrm{div};\Omega)$ in L^2-norm with $O(h^2+\tau^2)$ are derived technically under the semi-discrete scheme and the linearized Euler fully-discrete scheme. At last, numerical experiment is included to illustrate the feasibility of the proposed method.

Key words: Two-dimension Ginzburg-Landau equation; MFEM; Semi-discrete scheme; Linearized second-order fully-discrete scheme; Superclose property