应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2019, 32(4): 827-831

# Brown运动增量局部重对数律的一个注记

莫永向
(桂林电子科技大学数学与计算科学学院,
广西高校数据分析与计算重点实验室, 广西 桂林 541004)

**摘要：**本文利用Brown运动的大偏差, 研究Brown运动增量在一致范数下的局部重对数律, 对GAO等(2018)和危启才(2002)的文章中的相应结果作了推广和补充.

**关键词：**Brown运动; 局部重对数律; 一致范数
**中图分类号：**O211.4 **AMS(2000)主题分类：**60J65; 60F17; 60F15
**文献标识码：**A **文章编号：**1001-9847(2019)04-0827-05

## 1. 引言与主要结果

设$\{B(t); t\geq 0\}$ 是$d$维标准Brown运动. $C_0[0,1]=\{f; f:[0,1]\to\mathbb{R}^d, f(0)=0, f$连续$\}$赋予一致范数$\|f\|=\sup\lim_{0\leq t\leq 1}|f(t)|$. 设$a_u, b_u$是两个从$(0,1)$ 到$(0,\mathrm{e}^{-1})$非减连续函数, 且满足

(i) $0\leq a_u\leq b_u, u\in(0,1)$并且$\lim\limits_{u\to 0+} a_u=0$;

(ii) $\frac{b_u}{a_u}$ 非增;

(iii) $\lim\limits_{u\to 0+}\frac{\log(b_u/a_u)}{\log\log b_u^{-1}}=r, 0\leq r<\infty$.

定义映射$I: C_0\to[0,\infty]$如下

$$I(f)=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_0^1|\dot{f}(t)|^2\mathrm{d}t, & f\in C_0[0,1]\text{且}\dot{f}(t)\text{平方可积},\\ +\infty, & \text{否则}.\end{cases}$$

记$K_b=\{f\in C_0[0,1], 2I(f)\leq b^2\}$, 其中

$$b=\begin{cases}\sqrt{\frac{r}{1+r}}, & 0\leq r<\infty,\\ 1, & r=+\infty.\end{cases}$$

对$u\in(0,1)$, $0\leq t\leq 1$, 记$\Delta(t,u)$ 为下面轨道:

$$\Delta(t,u)(s)=B(b_ut+a_us)-B(b_ut),\ s\in[0,1].$$

设

$$\beta_u=\left(2a_u\log\frac{b_u\log b_u^{-1}}{a_u}\right)^{-1/2},\ u\in(0,1).$$

本文的主要结果如下:

**定理1.1** 如果条件(i), (ii)和(iii)成立, 那么以概率1, $\{\beta_u\Delta(t,u); u\in(0,1)\}(u\to 0)$在$C_0$中相对紧, 且其极限点集是$K_b$. 即,

$$\liminf_{u\to 0+}\sup_{t\in[0,1-\frac{a_u}{b_u}]}\|\beta_u\Delta(t,u)(\cdot)-K_b\|=0,\quad \text{a.s.}\tag{1.1}$$

* **收稿日期：**2018-09-21
**基金项目：**国家自然科学基金 (11661025)
**作者简介：**莫永向, 男, 壮族, 广西人, 讲师, 研究方向：随机过程的极限理论.

且

$$\lim_{u\to 0+}\inf_{t\in[0,1-\frac{a_u}{b_u}]}\|\beta_u\Delta(t,u)(\cdot)-f(\cdot)\|=0,\quad \text{a.s.},\quad 对任何\ f\in K_b. \tag{1.2}$$

**注1.1** 定理1.1的条件(iii)中$r=\infty$即$\lim\limits_{u\to 0+}\frac{\log(b_u/a_u)}{\log\log b_u^{-1}}=\infty$时, 见文[5]的定理1.1.

**推论1.1** 记$M_{t,h}(x)=\frac{B(t+hx)-B(t)}{\sqrt{2h\log h^{-1}}}$, $0\le x\le 1$, $0\le t\le 1-h$, 我们有

$$\liminf_{h\to 0+}\sup_{t\in[0,\mathrm{e}^{-2}-h]}\|M_{t,h}(\cdot)-K_b\|=0,\quad \text{a.s.}$$

且

$$\lim_{h\to 0+}\inf_{t\in[0,\mathrm{e}^{-2}-h]}\|M_{t,h}(\cdot)-f(\cdot)\|=0,\quad \text{a.s.},\quad 对任何\ f\in K_b.$$

Brown运动及其增量的极限定理是一个广泛研究的课题, 已有许多成果. GAO等[1]研究了一致范数下Brown运动增量的泛函极限及其收敛速率. 危启才在[3]中得到了$k$维布朗运动C-R型增量在Hölder 范数下的泛函极限定理. 对Brown运动局部极限定理人们也有研究, 危启才在文[4]中研究了Brown运动在Hölder范数下的泛函连续模. GAO等在文[5]中研究了一致范数下Brown运动增量的局部的泛函极限及其收敛速率. 对$0<r<\infty$情形, 本文研究了Brown运动增量在一致范数下的局部Strassen重对数律.我们的结果在一致范数下将文[3]中的定理2推广到局部的情形, 也扩展了文[5]中的相应结果, 作为应用, 我们得到了$0<r<\infty$情形下的泛函连续模.

## 2. 定理的证明

定理的证明需要下面的Schilder大偏差.

**引理2.1**[2] 对任何Borel集$A\subset C_0$,

$$-\Lambda(\mathring{A})\le\liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log P(\sqrt{\varepsilon}w\subset A)\le\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log P(\sqrt{\varepsilon}w\subset A)\le-\Lambda(\bar{A})$$

其中$\Lambda(A)=\inf_{f\in A}I(f)$.

**定理 1.1的证明** 当$r=0$时, $b=0, K_b=\{0\}$, 显然成立. 因此, 我们只需考虑$0<r<\infty$的情形.

由于$0\le\frac{a_u}{b_u}\le 1$ 且$\frac{a_u}{b_u}$非减, 故存在$\rho\in[0,1]$, 使得$\lim\limits_{u\to 0+}\frac{a_u}{b_u}=\rho$.

若$0<\rho\le 1$, 则$\lim\limits_{u\to 0+}\frac{b_u}{a_u}=\frac{1}{\rho}\in[1,+\infty)$ , 又由条件(i): $\lim\limits_{u\to 0+}a_u=0$知$\lim\limits_{u\to 0+}b_u=0$, 否则, $\lim\limits_{u\to 0+}\frac{b_u}{a_u}=+\infty$与$\lim\limits_{u\to 0+}\frac{b_u}{a_u}=\frac{1}{\rho}\in[1,+\infty)$矛盾.于是, $\limsup\limits_{u\to 0+}\frac{\log\frac{b_u}{a_u}}{\log\log b_u^{-1}}=0$, 即$r=0$, 此时, 显然成立.

所以, $\rho=0$, 即, $\lim\limits_{u\to 0+}\frac{a_u}{b_u}=0$, 从而

$$\lim_{u\to 0+}\frac{b_u}{a_u}=+\infty. \tag{2.1}$$

证(1.1)式, 我们首先证, 存在一个趋于零的非增数列$u_n$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,b_{u_n}-a_{u_{n+1}}]}\|\beta_{u_n}(B(t+a_{u_n}\cdot)-B(t))-K_b\|=0,\quad \text{a.s.}$$

记$A_1=\{f\in H:\|f-K_b\|\ge\varepsilon\}$. 显然, $A_1$ 是闭集, $\Lambda(A_1)>\frac{b^2}{2}$. 故存在充分小$\delta>0$, 使$\Lambda(A_1)>\frac{b^2}{2}+\delta$.

由于$\limsup\limits_{u\to 0+}\frac{\log\frac{b_u}{a_u}}{\log\log b_u^{-1}}=r<\infty$ , 故存在充分小的$\sigma: 0<\sigma<\delta(1+r)$, 使得

$$\frac{b_u}{a_u}\le(\log b_u^{-1})^{r+\sigma}. \tag{2.2}$$

记$\eta := \delta - \frac{\sigma}{r+1} + r\sigma + \delta\sigma$, 则$\eta > \delta - \delta(1+r)\frac{1}{r+1} + r\sigma + \delta\sigma = r\sigma + \delta\sigma > 0$. 取一个趋于零的非增数列$u_n$, 使得$b_{u_n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^n}$, 对任意小的$\varepsilon > 0$, 由(2.2)式和引理2.1, 当$n$充分大时, 我们有

$$
\begin{aligned}
&P\left(\sup_{t\in[0,b_{u_n}-a_{u_{n+1}}]}\|\beta_{u_n}(B(t+a_{u_n}\cdot)-B(t))-K_b\|\ge\varepsilon\right)\\
&=P\left(\sup_{x\in[0,\frac{b_{u_n}-a_{u_{n+1}}}{a_{u_n}}]}\|\frac{1}{\sqrt{2\log\frac{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}{a_{u_n}}}}((B(x+\cdot)-B(x))-K_b\|\ge\varepsilon\right)(x:=\frac{t}{a_{u_n}})\\
&\le\left[\frac{b_{u_n}-a_{u_{n+1}}+a_{u_n}}{a_{u_n}}\right]P\left(\frac{1}{\sqrt{2\log\frac{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}{a_{u_n}}}}B\in A_1\right)\\
&\le\frac{b_{u_n}+a_{u_n}}{a_{u_n}}\left(\frac{a_{u_n}}{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}\right)^{b^2+\delta}\\
&=\left(\frac{b_{u_n}}{a_{u_n}}\right)^{\frac{1}{1+r}-\delta}\left(\frac{1}{\log b_{u_n}^{-1}}\right)^{\frac{r}{r+1}+\delta}+\left(\frac{a_{u_n}}{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}\right)^{b^2+\delta}\\
&\le\left(\frac{1}{\log b_{u_n}^{-1}}\right)^{\delta-\frac{\sigma}{r+1}+r\sigma+\delta\sigma}+\left(\frac{a_{u_n}}{b_{u_n}}\right)^{b^2+\delta}\left(\frac{1}{\log b_{u_n}^{-1}}\right)^{b^2+\delta}\\
&=\left(\frac{1}{\mathrm{e}^\eta}\right)^n+\left(\frac{a_{u_n}}{b_{u_n}}\right)^{b^2+\delta}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{b^2+\delta}}\right)^n.
\end{aligned}
$$

注意到$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{u_n}}{b_{u_n}}=0$, 显然, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^\eta}\right)^n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{u_n}}{b_{u_n}}\right)^{b^2+\delta}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{b^2+\delta}}\right)^n$收敛. 由Borel-Cantelli引理知

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,b_{u_n}-a_{u_{n+1}}]}\|\beta_{u_n}(B(t+a_{u_n}\cdot)-B(t))-K_b\|=0,\quad \text{a.s.}$$

由于

$$
\begin{aligned}
\liminf_{u\to0+}\sup_{t\in[0,1-\frac{a_u}{b_u}]}\|\beta_u\Delta(t,u)-K_b\|&=\liminf_{u\to0+}\sup_{t\in[0,b_u-a_u]}\|\beta_u(B(t+a_u\cdot)-B(t))-K_b\|\\
&\le\liminf_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,b_{u_n}-a_{u_{n+1}}]}\|\beta_u(B(t+a_{u_n}\cdot)-B(t))-K_b\|
\end{aligned}
$$

故(1.1)式成立.

再证(1.2)式. 记$\psi_{t,u}(s)=\beta_u\big(B(t+a_us)-B(t)\big),\quad s\in[0,1],t\in[0,b_u-a_u]$,则

$$\psi_{t,u}(s)=\frac{\beta_u}{\beta_{u_n}}\psi_{t,u_n}(\frac{a_u}{a_{u_n}}s).$$

由(2.1)式:$\lim_{u\to0+}\frac{b_u}{a_u}=\infty$, 故可取一个趋于零的非增数列$u_n$, 使得$\frac{b_{u_n}}{a_{u_n}}=n^d$, 其中$0<d<r$.从而, 存在$n$, 使得$u_{n+1}<u<u_n$, 于是, 我们有

$$
\begin{aligned}
\inf_{t\in[0,1-\frac{a_u}{b_u}]}\|\beta_u\Delta(t,u)(\cdot)-f(\cdot)\|&=\inf_{x\in[0,b_u-a_u]}\|\frac{\beta_u}{\beta_{u_n}}\psi_{x,u_n}(\frac{a_u}{a_{u_n}}\cdot)-f(\cdot)\|\\
&\le\inf_{x\in[0,b_{u_{n+1}}-a_{u_n}]}\|\psi_{x,u_n}(\frac{a_u}{a_{u_n}}\cdot)-f(\frac{a_u}{a_{u_n}}\cdot)\|\\
&\quad+\left|\frac{\beta_u}{\beta_{u_n}}-1\right|\sup_{x\in[0,b_{u_{n+1}}-a_{u_n}]}\|\psi_{x,u_n}(\frac{a_u}{a_{u_n}}\cdot)\|+\|f(\frac{a_u}{a_{u_n}}\cdot)-f(\cdot)\|\\
&:=I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}\tag{2.3}
$$

先估计$I_1$.令$k_n=[\frac{b_{u_{n+1}}}{a_{u_n}}]-1, t_i=ia_{u_n}, i=0,1,2,...,k_n$, $A_2=\{g\in H:\|g-f\|<\varepsilon\}$, 因为$2\inf_{g\in A_2}I(g)<b^2=\frac{r}{1+r}$, 所以存在充分小的$\varsigma>0$, 使得$2\inf_{g\in A_2}I(g)<b^2-\varsigma<1$.再记$\zeta=b^2-\varsigma$, 显然$0<\zeta<1$.由引理2.1, 当$n$ 充分大时, 有

$$\begin{aligned}P(I_1\geq\varepsilon)&\leq P\left(\min_{0\leq i\leq k_n}\|\frac{1}{\sqrt{2\log\frac{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}{a_{u_n}}}}(B(i+s)-B(i))-f(s)\|\geq\varepsilon\right)\\&=\prod_{i=0}^{k_n}P\left(\|\frac{1}{\sqrt{2\log\frac{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}{a_{u_n}}}}(B(i+s)-B(i))-f(s)\|\geq\varepsilon\right)\\&=\left(1-P\left(\frac{1}{\sqrt{2\log\frac{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}{a_{u_n}}}}B\in A_2\right)\right)^{1+k_n}\\&\leq\exp\left\{-\left(\frac{a_{u_n}}{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}\right)^{\zeta}(1+k_n)\right\}\\&\leq\exp\left\{-\left(\frac{a_{u_n}}{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}\right)^{\zeta}\left[\frac{b_{u_{n+1}}}{a_{u_n}}\right]\right\}.\end{aligned}$$

注意到$\frac{b_{u_n}}{a_{u_n}}=n^d$, 显然$\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{a_{u_n}}{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}\right)^{\zeta}\left[\frac{b_{u_{n+1}}}{a_{u_n}}\right]\right\}<\infty$, 由Borel-Cantelli 引理知,

$$\lim_{n\to\infty}I_1=0\quad\text{a.s.}\tag{2.4}$$

令$h(n)=\frac{\log\frac{b_u}{a_u}}{\log\log b_u^{-1}}=\frac{d\log n}{\log\log b_u^{-1}}$, 那么$h(n)$单调非减, $\lim\limits_{n\to\infty}h(n)=r>0$且$b_{u_n}^{-1}=\exp\{n^{\frac{d}{h(n)}}\}$.又注意到$0<d<r$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{d}{h(n)}-1)=\frac{d}{r}-1<0$, 从而有

$$1\leq\frac{b_{u_n}}{b_{u_{n+1}}}=\exp\{(n+1)^{\frac{d}{h(n+1)}}-n^{\frac{d}{h(n)}}\}\leq\exp\{n^{\frac{d}{h(n)}}((1+\frac{1}{n})^{\frac{d}{h(n)}}-1)\}\leq\exp\{n^{\frac{d}{h(n)}-1}\}\to1, n\to\infty.$$

于是,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{u_n}}{a_{u_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^d\frac{b_{u_n}}{b_{u_{n+1}}}=1.\tag{2.5}$$

又因为$\beta_u$和$\log\frac{b_u\log b_u^{-1}}{a_u}$非增$(u\in(0,\mathrm{e}^{-1}))$, 所以

$$\frac{\beta_u}{\beta_{u_n}}-1\leq\frac{\beta_{u_{n+1}}}{\beta_{u_n}}-1=\left(\frac{a_{u_n}\log\frac{b_{u_n}\log b_{u_n}^{-1}}{a_{u_n}}}{a_{u_{n+1}}\log\frac{b_{u_{n+1}}\log b_{u_{n+1}}^{-1}}{a_{u_{n+1}}}}\right)^{1/2}-1\leq\left(\frac{a_{u_n}}{a_{u_{n+1}}}\right)^{1/2}-1.\tag{2.6}$$

由文[5]的定理1.1知, $\sup_{x\in[0,b_{u_{n+1}}-a_{u_n}]}\|\psi_{x,u_n}(\frac{a_u}{a_{u_n}}\cdot)\|$有界, 并注意到(2.5)式和(2.6)式, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}I_2=0\quad\text{a.s.}\tag{2.7}$$

又由于

$$\left\|f(\frac{a_u}{a_{u_n}}\cdot)-f(\cdot)\right\|\leq2\left(\frac{a_{u_n}}{a_{u_{n+1}}}-1\right)^{\frac{1}{2}}$$

并结合(2.6)式, 我们又有

$$\lim_{n\to\infty}I_3=0\quad\text{a.s.}\tag{2.8}$$

由(2.3), (2.4), (2.7)和(2.8)式知(1.2)式成立, 定理1.1证毕.

## 参考文献:

[1] GAO F, WANG Q. The rate of convergence in the functional limit theorem for increments of a Brownian motion[J]. Statist. & Probab. Lett., 2005, 73: 165-177.

[2] DEUSCHEL J D, STROOCK D W. Large Deviations[M]. Boston: Academic, 1989.

[3] 危启才. $k$维布朗运动C-R型增量在Hölder范数下的泛函极限定理[J]. 数学学报, 2002, 45(1): 117-126.

[4] WEI Q. Functional modulus of continuty for Brownian motion in Hölder norm[J]. Chin. Ann. of Math., 2001, 22B(2): 223-232.

[5] GAO F, LIU Y. Local functional limit theorems of increments for Brownian motion[J]. Acta Math. Sin. Engl. Ser., 2018, 34(7): 1074-1086.

# A Note on Local Law of the Iterated Logarithm for Increments of a Brownian Motion

*MO Yongxiang*

(*School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Data Analysis and Computation, Guilin 541004, China*)

**Abstract:** Using large deviation of Brownian motion, local law of the iterated logarithm for increments of a Brownian motion under the sup-norm is investigated. This paper provides an extension of the corresponding results by GAO et al. (2018) and WEI (2002).

**Key words:** Brownian motion; Local law of the iterated logarithm; Sup-norm