应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2019, 32(4): 860-864

一类p-Laplace方程非局部边值问题解的性态研究

付美美, 谢君辉
(湖北民族大学理学院, 湖北 恩施 445000)

摘要: 本文研究一类具非局部边值条件的p-Laplace抛物型方程解的性态. 利用抛物型方程的上下解方法和一些基本理论, 得到该问题解的整体存在性, 有限时刻爆破以及爆破速率的估计等结论.

关键词: p-Laplace方程; 整体存在性; 有限时刻爆破; 爆破速率
中图分类号: O175.23; O175.26 **AMS(2000)主题分类:** 35K15; 35K65
文献标识码: A **文章编号:** 1001-9847(2019)04-0860-05

1. 引言

本文主要讨论如下非局部边值条件的p-Laplace抛物型问题:

$$\begin{cases} u_t = \Delta_p u + u^q, \quad x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = \int_\Omega \Gamma(x,y) u^r(y,t) \mathrm{d}y, \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$q > 1$, $0 < r < 1$, Ω是$\mathbb{R}^N$中具有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域, $\Gamma(x,y)(x \in \partial\Omega, y \in \Omega)$是不恒为零的非负连续函数, $u_0(x) \in C(\overline{\Omega})$ 是非负函数, 并且满足相容性条件$u_0(x) = \int_\Omega \Gamma(x,y) u^r(y,0) \mathrm{d}y$, $x \in \partial\Omega$.

抛物型方程是一类重要的偏微分方程, 它可以用来描述自然界中大量存在的扩散现象, 例如在化学扩散, 生物种群及渗流理论等领域都提出了各种抛物型方程来描述扩散现象. 这些模型中一类很重要的模型为来自非牛顿流体理论的非牛顿渗流方程[1](抛物型p-Laplace方程):

$$u_t = \Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

已有很多的数学研究人员对含有p-Laplace算子的初边值问题进行了深入的探讨和研究. 1972年, Tsutsumi[2]研究了如下问题

$$\begin{cases} u_t = \Delta_p u + u^{1+\alpha}, \quad x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

文[2]中得出:当$p > 2 + \alpha$时, 对任何初值, 问题都存在一个非负的全局解. 当$2 < p < 2 + \alpha$时, 若初值足够小, 那么方程的解整体存在; 若初值足够大, 则解在有限的时间内发生爆破.

---

* **收稿日期:** 2018-09-30
基金项目: 国家自然科学基金 (11761030); 湖北省自然科学基金 (2017CFB352); 湖北民族学院博士科研启动基金 (MY2013B019)
作者简介: 谢君辉, 女, 土家族, 湖北人, 副教授, 研究方向:偏微分方程理论及应用.

带p-Laplace算子的非局部边值问题是偏微分方程边值问题的一个推广, 这类问题从多孔介质中气体的湍流理论以及非牛顿流体理论中产生, 由于具退化性质的非线性方程比线性方程和不具退化性的拟线性方程更能精确地刻画实际的物理现象, 许多作者研究了在不同边值条件下p-Laplace抛物型方程解的一些问题. 例如, 解的存在性和大时间性态[3−5]、全局正则性[6]以及爆破[7−8], 此外, 反应项带有局部源和非局部源的抛物问题也得到了广泛研究[9−11].

同时, 由于边界项等形成的各种耦合关系而导致问题解的不同性质也引起了众多学者的兴趣, 非线性边界条件可以描述为非线性扩散率, 例如, 热量由边界提供等. 王荣年和王艳[7]研究了如下非局部非线性边值条件的渗流方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + u^p, \quad x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = \displaystyle\int_\Omega \Gamma(x,y) u^q(y,t) \mathrm{d}y, \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

正解的整体存在性、爆破和爆破速率, 其中$m > 1, 0 < q < 1$, Ω是$\mathbb{R}^N$中具有光滑边界的有界区域.

本文中, 主要利用抛物方程上下解的方法及抛物方程的一些基本理论来证明解的整体存在性, 以及在有限时刻爆破和爆破速率的估计等结论. 我们研究非局部边界条件下, p-Laplace抛物型方程解的全局存在性及爆破性质、爆破发生的条件以及爆破发生的时间. 得出的结论如下:

定理 1.1　若$0 < r < 1$, $\int_\Omega \Gamma(x,y)\mathrm{d}y \geq 1, x \in \Omega$, 则问题(1.1)的解在有限时刻爆破.

定理 1.2　若$0 < r < 1$, $\int_\Omega \Gamma(x,y)\mathrm{d}y \leq 1, x \in \Omega$, 则

(i)当$u_0(x)$充分小时, 问题(1.1)的解整体存在;

(ii)当$u_0(x)$充分大时, 问题(1.1)的解在有限时刻爆破.

定理 1.3　若$0 < r < 1$, $\int_\Omega \Gamma(x,y)\mathrm{d}y \geq 1, x \in \Omega$, 且存在常数$\lambda > 0$, 使得$\Delta_p u_0 \geq (\lambda - 1)u_0^q$, 则问题(1.1)的爆破解$u(x,t) \leq \frac{M_1}{(T-t)^{\frac{1}{q-1}}}$, 其中$M_1$是正常数.

2. 预备知识

本节给出一些定义和预备知识, 以备后面各节使用.

定义2.1[12]　记$u(x,t)$为问题(1.1)的古典解, $T_{\max}$为$u(x,t)$的最大存在时间, 若$T_{\max} = +\infty$, 则称问题(1.1)的解$u(x,t)$整体存在, 或者问题(1.1)的解是全局存在的; 若$T_{\max} < +\infty$, 且$\lim\limits_{t \to T_{\max}} \sup\limits_{x \in \Omega} u(x,t) = +\infty$, 则称问题(1.1)的解$u(x,t)$在有限时刻爆破.

记$Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\partial Q_T = \partial\Omega \times [0,T) \cup \Omega \times \{t = T\}$, 下面给出问题(1.1)上解和下解的定义.

定义 2.2[13]　如果$\overline{u}(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \bigcap C(Q_T \bigcup \partial Q_T)$, 且满足

$$\begin{cases} \overline{u}_t \geq \Delta_p \overline{u} + \overline{u}^q \quad (x,t) \in Q_T, \\ \overline{u}(x,t) \geq \displaystyle\int_\Omega \Gamma(x,y) \overline{u}^r(y,t) \mathrm{d}y, \quad x \in \partial Q_T, \\ \overline{u}(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

则称函数$\overline{u}(x,t)$为问题(1.1)的上解.

定义 2.3[13]　如果$\underline{u}(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \bigcap C(Q_T \bigcup \partial Q_T)$, 且满足

$$\begin{cases} \underline{u}_t \leq \Delta_p \underline{u} + \underline{u}^q \quad (x,t) \in Q_T, \\ \underline{u}(x,t) \leq \displaystyle\int_\Omega \Gamma(x,y) \underline{u}^r(y,t) \mathrm{d}y, \quad x \in \partial Q_T, \\ \underline{u}(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

则称函数$\underline{u}(x,t)$为问题(1.1)的下解.

引理 2.1[13-14] 如果$\overline{u}$和$\underline{u}$分别为问题(1.1)的非负上解和非负下解, 且满足$\overline{u}(x,0) \geq \underline{u}(x,0), x \in \overline{\Omega}$, 则对任意的$(x,t) \in Q_T$, 有$\overline{u}(x,t) \geq \underline{u}(x,t)$.

3. 主要结果的证明

定理1.1的证明 令$T = \frac{1-\omega_0^{1-q}}{1-q}$, $0 \leq \omega_0 \leq \min\limits_{\Omega} u_0(x)$, 假如$\omega(t)$是如下问题

$$\begin{cases} \omega\prime(t) = \omega^q, & 0 \leq t \leq T, \\ \omega(0) = \omega_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

的解, 经过简单计算, 不难得到

$$0 < \omega(t) = [\omega_0^{1-q} + t(1-q)]^{\frac{1}{1-q}} \leq [\omega_0^{1-q} + T(1-q)]^{\frac{1}{1-q}} = 1.$$

从而, $\omega(t) \leq 1$, 又因为$0 < r < 1$, 因此

$$\int_\Omega \Gamma(x,y)\omega(t)\mathrm{d}y \leq \int_\Omega \Gamma(x,y)\omega^r(t)\mathrm{d}y,$$

同时注意到$\int_\Omega \Gamma(x,y)\mathrm{d}y \geq 1$, 那么, 我们有

$$\omega(t) \leq \int_\Omega \Gamma(x,y)\omega(t)\mathrm{d}y \leq \int_\Omega \Gamma(x,y)\omega^r(t)\mathrm{d}y.$$

此外, 由于$\omega(t) = \omega_0 \leq \min\limits_\Omega u_0(x) \leq u_0(x)$, 则$\omega(t)$ 是问题(1.1)的下解. 事实上, 当$t \to \frac{\omega_0^{1-q}}{q-1}$ 时, $\omega(t) = [\omega_0^{1-q} + t(1-q)]^{\frac{1}{1-q}} \to +\infty$, 即$\omega(t)$ 在有限时刻爆破.

综上, 问题(1.1)的解$u(x,t)$在有限时刻爆破.

定理1.2的证明 (i) 令$H(x)$ 为如下椭圆问题

$$\begin{cases} -\triangle_p H(x) = \delta_0, & x \in \Omega, \\ H(x) = \int_\Omega \Gamma(x,y)\mathrm{d}y \end{cases} \tag{3.2}$$

的唯一正解, 则当$\int_\Omega \Gamma(x,y)\mathrm{d}y < 1$时, 存在常数$\delta > 0$, 使得$\delta \leq H(x) \leq 1$, 令$H_1(x) = \max\limits_\Omega H(x)$, $H_2(x) = \min\limits_\Omega H(x)$, 作函数$J(x) = CH(x)$, 其中$C$为常数且$C \geq \delta^{-1}$, 从而$J(x) = CH(x) \geq \delta^{-1}\delta = 1$, 于是由$\int_\Omega \Gamma(x,y)\mathrm{d}y < 1$可知, $J(x)|_{\partial\Omega} = CH(x)|_{\partial\Omega} = C\int_\Omega \Gamma(x,y)\mathrm{d}y \geq \delta^{-1}\int_\Omega \Gamma(x,y)J^r(y)\mathrm{d}y$, 其中$0 < r < 1$. 此外,

$$J_t - \triangle_p J - J^q = -\triangle_p(CH(x)) - (CH(x))^q \geq C\delta_0 - C^q H_1^q.$$

由此说明, 若能证明$J(x)$是问题(1.1)的一个上解, 由引理2.1可知, 问题(1.1)的解整体存在.

下面, 证明$J(x)$是问题(1.1)的一个上解, 事实上, 若$C\delta_0 - C^q H_1^q \geq 0$, 即$C \geq (H_1^q(\delta_0)^{-1})^{\frac{1}{1-q}}$, 则$J_t \geq \triangle_p J + J^q$. 此外, 若$CH_2 \geq \max\limits_{\overline{\Omega}} u_0(x)$, 即$C \geq (H_2)^{-1}\max\limits_{\overline{\Omega}} u_0(x)$, 且由于$u_0(x)$足够小, 得到$J(0) \geq u_0(x)$, 从而, 取$C = \max\{(H_1^q(\delta_0)^{-1})^{\frac{1}{1-q}}, (H_2)^{-1}\max\limits_{\overline{\Omega}} u_0(x), \delta^{-1}\}$, 有:

$$\begin{cases} J_t \geq \triangle_p J + J^q, & x \in \Omega, \\ J(x)|_{\partial\Omega} = \int_\Omega \Gamma(x,y)J^r(y)\mathrm{d}y, & x \in \Omega, \\ J(0) \geq u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

即$J(x)$是问题(1.1)的一个上解. 综上, 当$\int_\Omega \Gamma(x,y)\mathrm{d}y < 1$ 时, 问题(1.1)的解整体存在.

(ii) 接下来证明, 当$u_0(x)$充分大的时候, 问题(1.1)的解在有限时刻爆破. 考虑如下初边值问题:

$$\begin{cases} h_t = \triangle_p h + h^q, & x \in \Omega, t > 0, \\ h(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ h(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

假设$h(x,t)$为问题(3.4)的解, 那么$h(x,t)$必为(1.1)的下解. 同时, 由引理2.1可知, $h(x,t) \le u(x,t), (x,t) \in Q_T$. 对问题(3.4)中的第一个等式两边同时在$\Omega$ 上积分, 利用格林公式简单计算可得$\int_\Omega \triangle_p h \mathrm{d}x = \int_\Omega \mathrm{div}(|\nabla h|^{p-2}\nabla h)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} |\nabla h|^{p-2}\nabla h \cdot \overrightarrow{n}\mathrm{d}S = 0$, 其中$\overrightarrow{n}$为$\partial\Omega$上的单位外法向量. 因此, 我们得:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega h\mathrm{d}x = \int_\Omega h^q \mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

运用Hölder不等式, 不难计算, $(\int_\Omega h\mathrm{d}x)^q \le |\Omega|^{q-1}\int_\Omega h^q\mathrm{d}x$, 令$f(t) = \int_\Omega h(x,t)\mathrm{d}x$, 结合(3.5)式, 我们得到$f^q(t) \le \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)|\Omega|^{q-1}$. 对于问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)|\Omega|^{q-1} \ge f^q(t), \\ f(0) = \displaystyle\int_\Omega h(x,0)\mathrm{d}x = \int_\Omega u_0(x)\mathrm{d}x > 0, \qquad x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.6}$$

当$t \to \frac{|\Omega|^{q-1}(f(0))^{1-q}}{q-1}$时, $f(t) \to \infty$, $f(t)$在有限时刻爆破, 从而$u(x,t)$在有限时刻爆破.

定理1.3的证明　令$\psi + \lambda u^q = u_t$, 则$q\psi u^{q-1} = qu^{q-1}u_t - q\lambda u^{2q-1}$, 从而, 取$\lambda$为足够小的正数时, 可得$\psi_t - \triangle_p\psi + qu^{q-1}\psi \ge 0$. 对固定的$(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$, 我们有

$$\psi(x,t) = u_t - \lambda u_q = \int_\Omega \Gamma(x,y)(u^r(y,t))_t \mathrm{d}y - \lambda(\int_\Omega \Gamma(x,y)u^r(y,t)\mathrm{d}y)^q.$$

又已知存在正常数, 使得$\triangle_p u_0 \ge (\lambda - 1)u_0^q$, 于是, 对任意的$x \in \Omega$, 有$\psi(x,0) = \triangle_p u_0 + (1-\lambda)u_0^q \ge 0$.

另一方面, 对固定的$(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$, 直接计算可得:

$$\begin{aligned}\psi(x,t) =& \int_\Omega \Gamma(x,y)ru^{r-1}(y,t)u_t(y,t)\mathrm{d}y - \lambda(\int_\Omega \Gamma(x,y)u^r(y,t)\mathrm{d}y)^q \\ =& r\int_\Omega \Gamma(x,y)u^{r-1}(y,t)\psi(y,t)\mathrm{d}y \\ &+ \lambda\Big(\int_\Omega r\Gamma(x,y)u^{q+r-1}(y,t)\mathrm{d}y - (\int_\Omega \Gamma(x,y)u^r(y,t)\mathrm{d}y)^q\Big).\end{aligned} \tag{3.7}$$

又因为

$$\begin{aligned}&\int_\Omega r\Gamma(x,y)u^{q+r-1}(y,t)\mathrm{d}y - (\int_\Omega \Gamma(x,y)u^r(y,t)\mathrm{d}y)^q \\ \ge& r\int_\Omega \Gamma(x,y)\mathrm{d}y \cdot \frac{(\int_\Omega \Gamma(x,y)u^r(y,t)\mathrm{d}y)^{1+\frac{q-1}{r}}}{(\int_\Omega \Gamma(x,y)\mathrm{d}y)^{1+\frac{q-1}{r}}} - [\int_\Omega \Gamma(x,y)u^r(y,t)\mathrm{d}y]^q.\end{aligned} \tag{3.8}$$

因此,

$$\psi(x,t) \ge \int_\Omega r\Gamma(x,y)u^{r-1}(y,t)\psi(y,t)\mathrm{d}y, \tag{3.9}$$

由(3.9)可得, $\psi(x,t) \ge 0, \quad \forall (x,t) \in \Omega \times [0,T]$, 从而,

$$u_t \ge \lambda u^q, \tag{3.10}$$

对(3.10)式在(t,T)上积分, 我们得到: $u(x,t) \le M_1\frac{1}{(T-t)^{\frac{1}{q-1}}}$.

4. 总结与展望

本文对一类p-Laplace热方程解的整体存在性、解的爆破和爆破速率进行了讨论, 先是对权函数给予了适当的条件, 然后利用抛物型方程的上下解方法来证明了解的整体存在性和有限时刻爆破的结论, 并给出了爆破速率的估计. 不难看出, 与一般的Dirichlet边界条件相对比, 权函数$\Gamma(x,y)$对问题(1.1)解的整体存在与否起着相当重要的作用. 我们的结果改进了文献的相关结果, 但仍有许多待研究的问题:

(i) 对于$0 \leq r \leq 1$的情形, 是否存在相应的临界指数以及能否刻画该抛物型方程的爆破, 到现在依然是一个开问题;

(ii) 对于更一般的情形, 即$u_t = \Delta_p u^m + u^q$的时候, 依然没有合适的爆破或者存在性结果;

(iii) 对于不加确定条件的情况, 即权函数$\Gamma(x, y)$不加限定条件, 仍然无法判断临界情形是否属于爆破情形.

参考文献:

[1] ALLEGRETTO W, HANG Y X. A picone identity for the p-Laplacian and applications[J]. Nonlinear Anal., 1998, 32(7): 819-830.

[2] TSUTSUMI M. Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations[J]. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 1972, 8(2): 211-229.

[3] HUA B B, MUGNOLO D. Time regularity and long-time behavior of parabolic p-Laplace equations on infinite graphs[J]. J. Differ. Equations, 2015, 259(11): 6162-6190.

[4] ZHANG Z C, LI Z J. An optimal Liouville-type theorem of the quasilinear parabolic equation with a p-Laplace operator[J]. Nonlinear Anal., 2011, 74(16): 5735-5744.

[5] ZHANG Z C, L Z J. A universal bound for radial solutions of the quasilinear parabolic equation with p-Laplace operator[J]. J. Math. Anal. Appl., 2012, 385(1): 125-134.

[6] JIA H L, WANG L H. Global regularity of parabolic p-Laplace equations on convex domains[J]. Nonlinear Anal., 2018, 169: 118-129.

[7] 王荣年, 王艳. 一类非局部渗流方程解的爆破[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2010, 46(5): 1-3.

[8] ZHANG Z C, CHEN S. Stability of blowup for a parabolic p-Laplace equation with nonlinear source[J]. Z. Anger. Math. Phys., 2013, 64(3): 483-491.

[9] KONG L H, WANG M X. Global existence and blow-up of solutions to a parabolic system with nonlocal sources and boundaries[J]. Sci. China Ser. A: Mathematics, 2007, 50(1): 1-16.

[10] SOUPLET PH . Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source[J]. J. Differ. Equations, 1999, 153(2): 374-406.

[11] LIN Z G, LIU Y R. Uniform blowup profiles for diffusion equations with nonlocal source and nonlocal boundary[J]. Acta Math. Sci., 2004, 24B(3): 443-450.

[12] QUITTNER P, SOUPLET PH. Superlinear Parabolic Problems: Blow-up, Global Existence and Steady States[M]. Berlin: Birkh*ä*aser, 2007.

[13] 王明新. 非线性抛物型方程[M]. 北京:科学出版社, 1997.

[14] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 第二版. 济南:山东科学技术出版社, 2004.

On Solutions for a Class of p-Laplace Equation with Nonlocal Boundary Condition

FU Meimei, XIE Junhui

(*College of Science, Hubei Minzu University, Enshi 445000, China*)

Abstract: In this article, we study a class of p-Laplace parabolic equation with nonlocal boundary condition. By the method of upper and lower solutions of parabolic equation and some basic theory of parabolic equations, we prove the global existence of solution, blow up in finite time as well as the rate of blow up.

Key words: p-Laplace equation; Global existence; Blow up in finite time; The rate of blow up