应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2019, 32(4): 872-878

一类新型α-可容许映射及相关公共不动点定理

江秉华, 蔡择林, 李必文, 陈金阳
(湖北师范大学数学与统计学院, 湖北 黄石 435002)

摘要: 本文定义一种向量版本的三角型α-可容许映射, 在没有利用锥的正规性条件下, 得到赋值Banach代数的锥度量空间中的带有三角型α-admissible映射的几种压缩映射的公共不动点定理, 所给出的结论进一步改进了前人的一些结果.
关键词: 三角型α-可容许映射; 锥度量空间; Banach代数; 广义Lipschitz常数; 公共不动点
中图分类号: O177.91 **AMS(2000)主题分类:** 54H25; 47H10
文献标识码: A **文章编号:** 1001-9847(2019)04-0872-07

1. 引言

2012年, Öztürk等[1]首先介绍了赋值Banach代数的锥度量空间这个概念, 他们将赋值Banach代数替换Banach空间并称之为赋值Banach代数的锥度量空间. 后来在2013年LIU等[2]在赋值Banach代数的锥度量空间中给出了几类带有广义Lipschitz常数的压缩映射的不动点定理, 并证明了这些定理和其它度量空间中相应结论的不等价性, 具有很好的理论和现实意义. 后来大量学者把注意力集中在赋值Banach代数的锥度量空间, 获得了很多的不动点结论[3−7].

Samet等[8]引入了α-可容许映射, 建立了带有α-可容许映射的广义压缩型映射的不动点定理, 随后Hussain[9]推广了α-可容许映射并证明了相应的不动点定理, Abdeljawad[10]建立了带有α-可容许映射对的广义压缩型映射的一些不动点定理. Arshad等[11]建立了带有三角型α-可容许映射的广义压缩型的公共不动点定理, 更多结果可参考相关文献[12−15]. 最近, 黄华平等[16]建立了带有向量版本的α-可容许映射的广义压缩型不动点定理. 这些压缩条件都很弱, 使得其应用性大大提高.

本文中, 我们首先给出了向量版本的三角型α-可容许映射对的概念, 而后建立了相应的Banach型压缩、Kannan型压缩、Chatterjea型压缩的公共不动点定理, 因而大大改进了先前的结果. 其后, 通过实例验证了本文的结论.

定义1.1[2] 设$\mathcal{A}$为Banach代数, θ和e分别为$\mathcal{A}$的零元和单位元, P为$\mathcal{A}$中的一个非空的闭子集, $\mathbb{R}_+$为非负实数集, 若满足:

1) $\{\theta, e\} \subset P$; 2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \lambda P + \mu P \subset P$; 3) $P^2 = PP \subset P$; 4) $P \bigcap (-P) = \theta$,
则称P为$\mathcal{A}$中的一个锥, 并称满足条件$\mathrm{int}P \neq \phi$的锥为体锥. 这里$\mathrm{int}P$表示P的全体内点所组成的集合.

* **收稿日期:** 2018-10-08
基金项目: 湖北省优秀青年科技创新项目 (T2014212)
作者简介: 江秉华, 男, 汉族, 湖北人, 教授, 研究方向: 泛函随机分析.

规定$x \preceq y \Leftrightarrow y-x \in P$, $x \ll y \Leftrightarrow y-x \in \mathrm{int}P$, 熟知“$\preceq$”, “$\ll$”是$\mathcal{A}$中的一个偏序, 称“$\preceq$”, “$\ll$”为锥$P$诱导的偏序关系. 若存在常数$K>0$, 使得当$\theta \preceq x \preceq y$时, $\|x\| \leq K\|y\|$ $(x,y\in\mathcal{A})$, 则锥P 称为正规锥, 满足前式的最小正常数K称为P的正规常数.

本文中总是假设$\mathcal{A}$为一个Banach代数, P是$\mathcal{A}$中的一个体锥, “$\preceq$”, “$\ll$”为锥P诱导的偏序关系.

定义1.2[2]　设X为非空集合, $\mathcal{A}$为Banach代数, 若映射$d: X\times X\to\mathcal{A}$满足:

1) $\theta \preceq d(x,y)$ $(\forall x,y\in X), d(x,y)=\theta \Leftrightarrow x=y$;

2) $d(x,y)=d(y,x)$ $(\forall x,y\in X)$;

3) $d(x,y)\preceq d(x,z)+d(z,y)$ $(\forall x,y,z\in X)$.

则称d为X上的一个锥度量, 同时称(X,d)为赋值Banach代数的锥度量空间.

定义1.3[7]　设P为Banach代数$\mathcal{A}$中的体锥, $\{u_n\}\subset\mathcal{A}$. 若$\forall c\gg 0$, 总存在一个自然数$N$, 使得当$n>N$时, 都有$u_n\ll c$, 则称$\{u_n\}$为$\mathcal{A}$的$c$-序列.

定义1.4[5]　设(X,d)为赋值Banach代数的锥度量空间, $\{x_n\}\subset X, x\in X$.

1) 若$\{d(x_n,x)\}$为$\mathcal{A}$中的一个c-序列, 则称$\{x_n\}$收敛到x, 记为$x_n\to x$ $(n\to\infty)$;

2) 若$\{d(x_n,x_m)\}$为$\mathcal{A}$中的一个c-序列, 则称$\{x_n\}$为X中的Cauchy 列;

3) 若X中的每一个Cauchy列都在X中收敛, 则称(X,d)是完备的.

定义1.5[8]　设X为非空集, $\alpha: X\times X\to[0,\infty)$为映射, $S: X\to X$是自映射. 若$\forall x,y\in X$, $\alpha(x,y)\geq 1\Rightarrow\alpha(Sx,Sy)\geq 1$, 则称$S$是$\alpha$-可容许映射.

定义1.6[10]　设X为非空集, $\alpha: X\times X\to[0,\infty)$为映射. $S,T: X\to X$是自映射, 若$x,y\in X$, $\alpha(x,y)\geq 1\Rightarrow\alpha(Sx,Ty)\geq 1$且$\alpha(Tx,Sy)\geq 1$, 则称$(S,T)$是$X$上的$\alpha$-可容许映射对.

定义1.7[10]　设X为非空集, $\alpha: X\times X\to\mathbb{R}$为映射, (S,T)是X上的α-可容许映射对. 若$x,y,z\in X, \alpha(x,z)\geq 1, \alpha(z,y)\geq 1\Rightarrow\alpha(x,y)\geq 1$, 则称$(S,T)$是$X$上的三角型$\alpha$-可容许映射对.

例1.1[11]　设$X=[0,\infty)$, 作映射$S: X\to X$, $\alpha: X\times X\to[0,\infty)$, 使得$Sx=2x$,

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}, & x\geq y,\ x\neq 0,\\ 0, & x<y.\end{cases}$$

则S是α-可容许映射.

例1.2[11]　设$X=\mathbb{R}$, 作映射$S,T: X\to X$, $\alpha: X\times X\to[0,\infty)$, 使得$Sx=2x$, $Tx=x^2$,

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{xy}, & x,y\geq 0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则(S,T)是X上的三角型α-可容许映射对.

引理1.1[3]　设 P为Banach代数$\mathcal{A}$中的锥, $a,b\in\mathcal{A}$, $c\in P$, 若$a\preceq b$, 则$ac\preceq bc$.

引理1.2[3]　设 P为Banach代数$\mathcal{A}$中的锥, $u,v,w\in P$, $u\preceq v\ll w$, 则$u\ll w$.

引理1.3[2]　设(X,d)为赋值Banach代数$\mathcal{A}$的锥度量空间, $\{x_n\}\subset X$, $x,y\in X$. 若当$n\to\infty$时, $x_n\to x$, $x_n\to y$, 则$x=y$.

引理1.4[4]　设 P为Banach代数$\mathcal{A}$中的锥, $k\in P$, $\{u_n\}$为$\mathcal{A}$中的c-序列, 则$\{ku_n\}$也为$\mathcal{A}$中的c-序列.

引理1.5[4]　设 $\mathcal{A}$为带有单位元e的Banach代数, $\rho(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}$为$x\in\mathcal{A}$的谱半径. 若$\rho(x)<1$, 那么$e-x$可逆, 且$(e-x)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, 还有$\rho\big((e-x)^{-1}\big)\leq\frac{1}{1-\rho(x)}$.

引理1.6[4]　设 P为Banach代数$\mathcal{A}$中的锥, $k\in P$, 若$\rho(k)<1$, 则$\{k^n\}$是一个c-序列.

引理1.7[17] 设 $\mathcal{A}$为带有单位元e的Banach代数, $a,b\in\mathcal{A}$且a,b可交换, 则$\rho(a+b)\le\rho(a)+\rho(b)$, $\rho(ab)\le\rho(a)\rho(b)$.

引理1.8[11] 设$S,T:X\to X$是三角型α-可容许映射对. 假设存在$x_0\in X$使得$\alpha(x_0,Sx_0)\ge 1$. 若$x_{2i+1}=Sx_{2i}$, $x_{2i+2}=Tx_{2i+1},(i=0,1,2...)$, 则$\forall m,n\in\mathbb{N}$, $m>n$有$\alpha(x_n,x_m)\ge 1$.

2. 主要定理及证明

定义2.1 设X为非空集, $\mathcal{A}$为带有单位元e的Banach代数, $\alpha:X\times X\to\mathcal{A}$, $S,T:X\to X$都为映射, 满足下列条件:

1) 若$x,y\in X$, $\alpha(x,y)\succeq e\Rightarrow\alpha(Sx,Ty)\succeq e$且$\alpha(Tx,Sy)\succeq e$;

2) 若$x,y,z\in X$, $\alpha(x,z)\succeq e$, $\alpha(z,y)\succeq e\Rightarrow\alpha(x,y)\succeq e$.

则称(S,T)是X上的三角型α-可容许映射对.

定义2.2 设X为非空集, $\mathcal{A}$为带有单位元e的Banach代数, $\alpha:X\times X\to\mathcal{A}$为映射. 若对于满足条件$\alpha(x_n,x_{n+1})\succeq e\ (n\in\mathbb{N})$的$\{x_n\}\subset X$, 都存在子序列$\{x_{n_i}\}$, 使得$\alpha(x_{n_i},x)\succeq e$, 则称$X$是$\alpha$-弱正则的.

引理2.1 设(S,T)是X上的三角型α-可容许映射对, 若存在点$x_0\in X$, 使得$\alpha(x_0,Sx_0)\succeq e$, 定义序列$x_{2i+1}=Sx_{2i}$, $x_{2i+2}=Tx_{2i+1}\ (i\in\mathbb{N})$, 则$\forall m,n\in\mathbb{N}$, $m>n$有$\alpha(x_n,x_m)\succeq e$成立.

证 由$x_0\in X$, 有$\alpha(x_0,Sx_0)\succeq e\Rightarrow\alpha(x_0,x_1)\succeq e$. 因$(S,T)$是$X$上的三角型$\alpha$- 可容许映射对, 故$\alpha(Sx_0,Tx_1)\succeq e\Rightarrow\alpha(x_1,x_2)\succeq e\Rightarrow\alpha(Tx_1,Sx_2)\succeq e\Rightarrow\alpha(x_2,x_3)\succeq e$, ..., $\alpha(x_n,x_{n+1})\succeq e$. 再由$\alpha(x_n,x_{n+1})\succeq e$, $\alpha(x_{n+1},x_{n+2})\succeq e$有$\alpha(x_n,x_{n+2})\succeq e$. 由$\alpha(x_n,x_{n+2})\succeq e$, $\alpha(x_{n+2},x_{n+3})\succeq e$有$\alpha(x_n,x_{n+3})\succeq e$.... 由$\alpha(x_n,x_{m-1})\succeq e$, $\alpha(x_{m-1},x_m)\succeq e$, 即得$\alpha(x_n,x_m)\succeq e$. 所以对于$\forall m,n\in\mathbb{N}$, $m>n$有$\alpha(x_n,x_m)\succeq e$成立.

引理2.2 设(S,T)是X上的三角型α-可容许映射对, 若存在点$x_0\in X$, 使得$\alpha(Sx_0,x_0)\succeq e$, 定义序列$x_{2i+1}=Sx_{2i}$, $x_{2i+2}=Tx_{2i+1}\ (i\in\mathbb{N})$, 则$\forall m,n\in\mathbb{N}$, $m<n$有$\alpha(x_n,x_m)\succeq e$成立.

证 类似于引理2.1的证明, 即可.

定理2.1 设 (X,d)为赋值Banach代数$\mathcal{A}$的完备锥度量空间, 且$\mathcal{A}$有单位元e. 设P为$\mathcal{A}$中的体锥, $\alpha:X\times X\to\mathcal{A}$为映射, (S,T)是X上的三角型α-可容许映射对. 如果

$$\alpha(x,y)d(Sx,Ty)\preceq kd(x,y)\ (x,y\in X), \tag{1}$$

且满足下列条件:

1) 存在点$x_0\in X$, 使得$\alpha(x_0,Sx_0)\succeq e$且$\alpha(Sx_0,x_0)\succeq e$;

2) S和T是连续的或X是α-弱正则的,

其中$k\in P$为广义Lipschitz 常数, 且$\rho(k)<1$, 则S,T在X中有公共不动点.

证 设 $x_0\in X$, 取$x_1\in X$, 使得$x_1=Sx_0$, 取$x_2\in X$, 使得$x_2=Tx_1$. 连续这个过程, 可以构造序列$\{x_n\}\subset X$, 使得

$$x_{2n+1}=Sx_{2n},\ \ x_{2n+2}=Tx_{2n+1}\ \ (n\in\mathbb{N}).$$

由假设条件, 利用引理2.1 有$\alpha(x_{2n},x_{2n+1})\succeq e$. 由引理1.1 及式(1) 有

$$d(x_{2n+1},x_{2n+2})=d(Sx_{2n},Tx_{2n+1})\preceq\alpha(x_{2n},x_{2n+1})d(Sx_{2n},Tx_{2n+1})\preceq kd(x_{2n},x_{2n+1}). \tag{2}$$

再由假设条件, 利用引理2.2 有$\alpha(x_{2n+2},x_{2n+1})\succeq e$. 由引理1.1及式(1)有

$$\begin{aligned}d(x_{2n+2},x_{2n+3})&=d(Tx_{2n+1},Sx_{2n+2})\preceq\alpha(x_{2n+2},x_{2n+1})d(Tx_{2n+1},Sx_{2n+2})\\&=\alpha(x_{2n+2},x_{2n+1})d(Sx_{2n+2},Tx_{2n+1})\\&\preceq kd(x_{2n+2},x_{2n+1})=kd(x_{2n+1},x_{2n+2}),\end{aligned} \tag{3}$$

由式(2)和式(3)有

$$d(x_{n+1},x_{n+2})\preceq kd(x_n,x_{n+1})\ \ (n\in\mathbb{N}),$$

于是

$$d(x_{n+1},x_{n+2}) \preceq kd(x_n,x_{n+1}) \preceq k^2 d(x_{n-1},x_n)\cdots \preceq k^{n+1}d(x_0,x_1).$$

因此$\forall m,n\in\mathbb{N}$, $m>n$, 由引理1.5有

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\preceq d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{m-1},x_m)\\ &\preceq (k^n+k^{n+1}+\cdots+k^{m-1})d(x_0,x_1)\\ &=(e+k+\cdots+k^{m-n-1})k^n d(x_0,x_1)\\ &\preceq \Big(\sum_{n=0}^{\infty}k^n\Big)k^n d(x_0,x_1)=(e-k)^{-1}k^n d(x_0,x_1). \end{aligned} \tag{4}$$

由于$\rho(k)<1$, 由引理1.4 和引理1.6知$(e-k)^{-1}k^n d(x_0,x_1)$是一个c序列. 又由引理1.2和式(4)可知$d(x_n,x_m)$也是一个c序列, 所以$\{x_n\}$ 为X中Cauchy列. 由于(X,d)的完备性, 因此存在$x\in X$, 使得$x_n\to x\ (n\to\infty)$.

如果S,T是连续的, 那么

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}Sx_{2n}=Sx,\quad \lim_{n\to\infty}x_{2n+2}=\lim_{n\to\infty}Tx_{2n+1}=Tx.$$

由引理1.3可得$Sx=x$, $Tx=x$, 即x是S,T的一个公共不动点.

如果X是α-弱正则的, 则由假设条件及引理2.1, 存在$\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$, 使得$\alpha(x_{n_i},x)\succeq e$. 现在通过式(1) 有

$$d(x_{2n_i+1},Tx)=d(Sx_{2n_i},Tx)\preceq \alpha(x_{2n_i},x)d(Sx_{2n_i},Tx)\preceq kd(x_{2n_i},x).$$

因为$\{d(x_{2n_i},x)\}$为c-序列, 由引理1.4知$\{kd(x_{2n_i},x)\}$也为c-序列. 又由引理1.2 知$d(x_{2n_i+1},Tx)$亦为c序列, 从而$x_{2n_i+1}\to Tx\ (i\to\infty)$. 再由引理1.3得到$Tx=x$. 类似地, 可得$Sx=x$, 因此$x=Sx=Tx$, 即$x$是$S,T$的一个公共不动点.

定理2.2 设 (X,d)为赋值Banach代数$\mathcal{A}$的完备锥度量空间, 且$\mathcal{A}$有单位元e. 设P为$\mathcal{A}$中的体锥, $\alpha: X\times X\to\mathcal{A}$为映射, (S,T)是X上的三角型α-可容许映射对. 如果

$$\alpha(x,y)d(Sx,Ty)\preceq k[d(x,Sx)+d(y,Ty)]\ (x,y\in X) \tag{5}$$

且满足下列条件:

1) 存在点$x_0\in X$, 使得$\alpha(x_0,Sx_0)\succeq e$且$\alpha(Sx_0,x_0)\succeq e$;

2) S和T是连续的或X是α-弱正则的,

其中$k\in P$为广义Lipschitz常数, 且$\rho(k)<\frac{1}{2}$, 则S,T在X中有公共不动点.

证 设 $x_0\in X$, 作点列$\{x_n\}\subset X$, 适合

$$x_{2n+1}=Sx_{2n},\ \ x_{2n+2}=Tx_{2n+1}\ \ (n\in\mathbb{N}).$$

利用条件$\alpha(x_0,Sx_0)\succeq e$和引理2.1可得$\alpha(x_{2n},x_{2n+1})\succeq e$, 再由条件(5)有

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1},x_{2n+2})&=d(Sx_{2n},Tx_{2n+1})\preceq\alpha(x_{2n},x_{2n+1})d(Sx_{2n},Tx_{2n+1})\\ &\preceq k[d(x_{2n},Sx_{2n})+d(x_{2n+1},Tx_{2n+1})]\\ &=k[d(x_{2n},x_{2n+1})+d(x_{2n+1},x_{2n+2})], \end{aligned}$$

从而

$$(e-k)d(x_{2n+1},x_{2n+2})\preceq kd(x_{2n},x_{2n+1}).$$

由于$\rho(k)<\frac{1}{2}$, 由引理1.5可得$e-k$可逆, 因而有

$$d(x_{2n+1},x_{2n+2})\preceq(e-k)^{-1}kd(x_{2n},x_{2n+1}).$$

令$h=(e-k)^{-1}k$, 注意到$\rho(k)<\frac{1}{2}$, 由引理1.5和引理1.7可得

$$\rho(h)=\rho\big((e-k)^{-1}k\big)\le\rho\big((e-k)^{-1}\big)\rho(k)\le\frac{\rho(k)}{1-\rho(k)}<1,$$

所以

$$d(x_{2n+1},x_{2n+2})\preceq hd(x_{2n},x_{2n+1}). \tag{6}$$

类似地, 有

$$d(x_{2n+2},x_{2n+3})\preceq hd(x_{2n+1},x_{2n+2}). \tag{7}$$

由式(6)-(7)有

$$d(x_{n+1},x_{n+2})\preceq hd(x_n,x_{n+1})\ \ (n\in\mathbb{N}),$$

于是

$$d(x_{n+1},x_{n+2})\preceq hd(x_n,x_{n+1})\preceq h^2d(x_{n-1},x_n)\cdots\preceq h^{n+1}d(x_0,x_1).$$

由定理2.1的证明过程知, 存在$x\in X$, 使得$x_n\to x\ \ (n\to\infty)$.

如果S,T是连续的, 那么

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}Sx_{2n}=Sx,\ \ \lim_{n\to\infty}x_{2n+2}=\lim_{n\to\infty}Tx_{2n+1}=Tx.$$

由引理1.3可得$Sx=x,\ \ Tx=x$, 即x是S,T的一个公共不动点.

如果X是α-弱正则的, 则由引理2.1及假设条件, 存在$\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$, 使得$\alpha(x_{2n_i},x)\succeq e$. 现在通过式(5)有

$$\begin{aligned}d(x_{2n_i+1},Tx)&=d(Sx_{2n_i},Tx)\\&\preceq\alpha(x_{2n_i},x)d(Sx_{2n_i},Tx)\preceq k[d(x_{2n_i},Sx_{2n_i})+d(x,Tx)]\\&\preceq k[d(x_{2n_i},x_{2n_i+1})+d(x,x_{2n_i+1})+d(x_{2n_i+1},Tx)].\end{aligned}$$

进而有

$$(e-k)d(x_{2n_i+1},Tx)\preceq k[d(x_{2n_i},x_{2n_i+1})+d(x,x_{2n_i+1})].$$

注意到$(e-k)$是可逆的, 那么有

$$d(x_{2n_i+1},Tx)\preceq(e-k)^{-1}k[d(x_{2n_i},x_{2n_i+1})+d(x,x_{2n_i+1})].$$

因为$d(x_{2n_i},x_{2n_i+1})+d(x,x_{2n_i+1})$为$c$-序列, 由引理1.4 知$(e-k)^{-1}k[d(x_{2n_i},x_{2n_i+1})+d(x,x_{2n_i+1})]$也为$c$-序列, 又由引理2 知$d(x_{2n_i+1},Tx)$亦为$c$序列, 从而$x_{2n_i+1}\to Tx\ (i\to\infty)$. 再由引理1.3得到$Tx=x$. 类似地, 可得$Sx=x$, 因此$x=Sx=Tx$, 即$x$是$S,T$的一个公共不动点.

定理2.3 设 (X,d)为赋值Banach代数$\mathcal{A}$的完备锥度量空间, 且$\mathcal{A}$有单位元e. 设P为$\mathcal{A}$中的体锥, $\alpha:X\times X\to\mathcal{A}$为映射, (S,T)是X上的三角型α-可容许映射对. 如果

$$\alpha(x,y)d(Sx,Ty)\preceq k[d(x,Ty)+d(y,Sx)]\ (x,y\in X) \tag{8}$$

且满足下列条件

1) 存在点$x_0\in X$, 使得$\alpha(x_0,Sx_0)\succeq e$且$\alpha(Sx_0,x_0)\succeq e$;

2) S和T是连续的或X是α-弱正则的,

其中$k\in P$为广义Lipschitz常数, 且$\rho(k)<\frac{1}{2}$, 则S,T在X中有公共不动点.

证 设 $x_0\in X$, 作点列$\{x_n\}\subset X$, 适合

$$x_{2n+1}=Sx_{2n},\ \ x_{2n+2}=Tx_{2n+1}\ \ (n\in\mathbb{N}).$$

利用条件$\alpha(x_0,Sx_0)\succeq e$和引理2.1可得$\alpha(x_{2n},x_{2n+1})\succeq e$. 再由条件(8)有

$$\begin{aligned}d(x_{2n+1},x_{2n+2})&=d(Sx_{2n},Tx_{2n+1})\\&\preceq\alpha(x_{2n},x_{2n+1})d(Sx_{2n},Tx_{2n+1})\preceq k[d(x_{2n},Tx_{2n+1})+d(x_{2n+1},Sx_{2n})]\\&=k[d(x_{2n},x_{2n+2})+d(x_{2n+1},x_{2n+1})]\preceq k[d(x_{2n},x_{2n+1})+d(x_{2n+1},x_{2n+2})],\end{aligned}$$

从而

$$(e-k)d(x_{2n+1},x_{2n+2})\preceq kd(x_{2n},x_{2n+1}).$$

类似地, 可得

$$(e-k)d(x_{2n+2},x_{2n+3})\preceq kd(x_{2n+1},x_{2n+2}).$$

因此

$$d(x_{n+1},x_{n+2})\preceq (e-k)^{-1}kd(x_n,x_{n+1}).$$

由定理2.2 的证明过程知, 存在$x\in X$, 使得$x_n\to x\ (n\to\infty)$.

若S,T是连续的, 则

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}Sx_{2n}=Sx,\ \ \lim_{n\to\infty}x_{2n+2}=\lim_{n\to\infty}Tx_{2n+1}=Tx.$$

由引理1.3可得$Sx=x,\ Tx=x$, 即x是S,T的一个公共不动点.

如果X是α-弱正则的, 则由引理2.1及假设条件, 存在$\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$, 使得$\alpha(x_{2n_i},x)\succeq e$. 现在通过式(8)有

$$\begin{aligned}d(x_{2n_i+1},Tx)&=d(Sx_{2n_i},Tx)\preceq\alpha(x_{2n_i},x)d(Sx_{2n_i},Tx)\\&\preceq k[d(x_{2n_i},Tx)+d(x,Sx_{2n_i})]=k[d(x_{2n_i},Tx)+d(x,x_{2n_i+1})]\\&\preceq k[d(x_{2n_i},x_{2n_i+1})+d(x_{2n_i+1},Tx)+d(x,x_{2n_i+1})],\end{aligned}$$

进而有

$$(e-k)d(x_{2n_i+1},Tx)\preceq k[d(x_{2n_i},x_{2n_i+1})+d(x,x_{2n_i+1})].$$

注意到$(e-k)$是可逆的, 那么有

$$d(x_{2n_i+1},Tx)\preceq (e-k)^{-1}k[d(x_{2n_i},x_{2n_i+1})+d(x,x_{2n_i+1})].$$

因为$d(x_{2n_i},x_{2n_i+1})+d(x,x_{2n_i+1})$为$c$-序列, 由引理1.4 知$(e-k)^{-1}k[d(x_{2n_i},x_{2n_i+1})+d(x,x_{2n_i+1})]$也为$c$-序列, 又由引理1.2知$d(x_{2n_i+1},Tx)$亦为$c$序列, 从而$x_{2n_i+1}\to Tx\ (i\to\infty)$. 再由引理1.3得到$Tx=x$. 类似地, 可得$Sx=x$, 因此$x=Sx=Tx$, 即$x$是$S,T$的一个公共不动点.

注1　定理2.1-2.3分别改进了文[2]及文[7]的定理2.1-2.3和定理3.1-3.3的, 去掉了文[2]中定理的正规性条件, 本文的压缩条件比文[2]及文[9]中的那些定理的压缩条件要宽松得多.

注2　在本文定理2.1-2.3中分别假设$S=T$即可得到文[16]中的定理1-3.

参考文献:

[1] ÖZTÜRK M, BAŞARIR M. On some common fixed point theorems with rational expressions on cone meteic spaces over a Banach algebra[J]. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2012, 41(2): 211.

[2] LIU H, XU S Y. Cone metric spaces with Banach algebras and fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings[J/OL]. Fixed Point Theory and Applications, 2013:320[2013-11-25]. DOI:10.1186/1687-1812-2013-320.

[3] HUANG H P, XU S Y, LIU H, etal. Fixed point theorems and T-stability of Picarditeration for generalized Lipschitz mappings in cone metric spaces over Banach algebras[J]. Journal of Computational Analysis and Applications, 2016, 20(5): 869-874.

[4] HUANG H P, RADENOVIĆ S. Common fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings incone b-metricspaces over Banach algebras and applications[J]. Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 2015, 8(5): 787-796.

[5] HUANG H P, RADENOVIĆ S. Some fixed point results of generalized Lipschitz mappings on cone b-metric spaces over Banach algebras[J]. Journal of Computational Analysis and Applications, 2016, 20(1): 566-572.

[6] YINJ D, WANG T, YAN Q. Fixed point theorems of ordered contractive mappings on cone metric spaces over Banach algebras[J/OL]. Fixed Point Theory and Applications, 2015:48[2015-04-09].DOI:10.1186/s13663-015-0301-x.

[7] XU S Y, RADENOVIĆ S. Fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings on cone metric spaces over Banach algebras without assumption of normality[J/OL]. Fixed Point Theory and Applications, 2014:102[2014-05-09].DOI:10.1186/1687-1812-2014-102.

[8] SAMET B, VETRO C, VETRO P. Fixed point theorems for α-ψ-contractive type mappings[J]. NonlinearAnalysis, 2012, 75(4): 21-54.

[9] HUSSAIN N, KARAPINAR E, SALIMI P, AKBAR F. α-Admissible mappings and related fixed point theorems[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2013, (114): 1-11.

[10] ABDELJAWAD T, Meir-Keeler α-contractive fixed and common fixed point theorems[J/OL]. Fixed Point Theory and Applications, 2013:19[2013-01-01]. DOI:10.1186/1687-1812-2013-19.

[11] ARSHAD M, Hussain A, Azam A. Fixed point of α-Geraghty contraction with applications[J]. Upb Scientific Bulletin, 2016, 78(2): 67-78.

[12] HUANG H P, DENG G T, RADENOVIĆ S, et al. Fixed point results for admissible mappings with application to integral equations[J]. Journalof Nonlinear Scienceand Applications, 2016, 9(12): 62-69.

[13] SINTUNAVARAT W. Nonlinear integral equations with new admissibility types in b-metric spaces[J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2016, 18(2): 397-405.

[14] CHANDOK S. Some fixed point theorems for (α, β)-admissible Geraghty type contractive mappings and related results[J]. Mathematical Sciences, 2015, 9(3): 127-136.

[15] MALHOTRA S K, SHARMA J B, SHUKLA S. Fixed points of α-admissible mappings in cone metric spaces Banach algebra[J]. International Journal of Analysis and Applications, 2015, 9(1): 9-18.

[16] 黄华平, 邓冠铁, 等. 赋值Banach代数的锥度量空间中的一类新型不动点定理[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2017, 53(4):693-698.

[17] 童裕孙. 泛函分析教程[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2003.

A Type New α-Admissible Mappings and Related Common Fixed Point Theorems

JIANG Binghua, CAI Zelin, LI Biwen, CHEN Jinyang

(*School of Mathematics and Statistics, Hubei Normal University, Huangshi 435002, China*)

Abstract: In this paper, we introduce the triangular α-admissible mapping in the setting of cone metric spaces equipped with Banach algebra and solid cones. In terms of the normal conditions of the cone, our results generalize and extend several known common fixed point theorems of metric and cone metric spaces.

Key words: Triangle type α-admissible mapping; Cone metric space; Banach algebra; Fixed point; Generalized Lipschitz constant