应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2020, 33(3): 614-619

Orlicz空间内的Müntz有理函数的逼近

王亚茹, 吴嘎日迪
(内蒙古师范大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010022)

摘要: 本文研究了Orlicz空间内Müntz有理函数逼近问题, 相比于前人对同类问题的研究, 本文改进了系指数$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$所满足的条件, 利用Hölder不等式、Hardy-Littlewood极大函数、K-泛函、连续模、N函数的凸性等技巧, 得到逼近的Jackson型定理. 由于Orlicz空间的拓扑结构比连续函数空间和Lp空间复杂, 所以本文的结果具有一定的拓展意义.

关键词: Müntz有理函数; Orlicz空间; 逼近; Jackson型定理
中图分类号: O174.41 **AMS(2000)主题分类:** 41A20; 41A25
文献标识码: A **文章编号:** 1001-9847(2020)03-0614-06

1. 引言

设$C[0,1]$空间是[0,1]区间上的全体连续函数, 给定任意非负且严格递增的实数序列$\varLambda_n=\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$. 令

$$R_n(\varLambda)=\{\frac{P(x)}{Q(x)}:P(x),Q(x)\in\operatorname{span}\{x^{\lambda_k}\},\lambda_k\in\varLambda_n,Q(x)\geq0\},$$
$$R_n(f,\varLambda)=\inf_{r\in R(\varLambda)}\|f-r\|,$$

其中, $\operatorname{span}\{x^{\lambda_k}\}$为$\{x^{\lambda_k}\}$ 的线性组合的全体所构成的集合. 当$Q(0)=0$时, 我们认为

$$\frac{P(0)}{Q(0)}=\lim_{x\to0^+}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

存在且有限.

在1941年Müntz[1]考虑Müntz系统$\{x^{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$在$C:[0,1]$空间的稠密性之后, 有许多学者对各类Müntz 多项式和Müntz有理函数讨论了稠密性问题. 随着研究的深入, 对Müntz有理函数的速度刻画成为了有趣而困难的课题, 唐秀娟在文[2]中给出J. Bak的一个开创性结果:

定理A[2] 设$f(x)\in C[0,1]$, 给定$A>0$, 若对所有的$n\geq1$有$\lambda_{n+1}-\lambda_n\geq An$, 则存在$r_n(x)\in R_n(\varLambda)$ 和仅依赖于A的正常数C_A使得

$$\|f(x)-r_n(x)\|\leq C_A\omega(f,\frac{1}{n}),$$

这里$\omega(f,t)$表示$f(x)$通常的连续模.

文[2]减弱了系指数$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$满足的条件, 给出

定理B[2] 设$f(x)\in L_{[0,1]}^{P}$, 若对所有的$n\geq1$有$\lambda_{n+1}-\lambda_n\geq An^{\alpha}(\frac{1}{2}\leq\alpha<\infty)$, 则存在一个依赖于$M$的正常数$C_M$使得$R_n(f,\varLambda)_{L_{[0,1]}^{P}}\leq C_A\omega(f,\frac{1}{n})_{L_{[0,1]}^{P}}$.

* **收稿日期:** 2019-06-04
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11761055), 内蒙古自然科学基金资助项目 (2017MS0123)
作者简介: 王亚茹, 女, 汉族, 吉林人, 研究方向: 函数逼近论.
通讯作者: 吴嘎日迪.

本文将定理B的结论推广到Orlicz空间. 另一方面, 注意到多项式倒数逼近也是有理逼近的重要组成部分. 许贵桥在文[3]中用Bernstein多项式对连续函数进行倒数逼近. 多项式倒数逼近为许多学者所研究, 并得到很多好的结果, 见文[4-6]本文在Orlicz空间内, 更深一步地研究有理逼近问题.

根据文[2]构造的Kantorovich-Müntz算子

$$K_n^*(f,x)=n\sum_{k=1}^{n}r_k(x)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(t)\mathrm{d}t.$$

或$K_n^*(f,x)=n\int_0^1 Q(x,t)f(t)\mathrm{d}t$, 这里$Q(x,t)=r_k(x)$, $\frac{k-1}{n}\le t\le\frac{k}{n}$.

本文记

$$\Delta\lambda_k=\lambda_k-\lambda_{k-1},k=2,3,\cdots.$$

再写

$$x_j:=\frac{j}{n},0\le j\le n,P_j(x)=x^{\lambda_j}\prod_{l=1}^{j}x_l^{-\Delta\lambda_l},r_k=\frac{P_k(x)}{\sum_{j=1}^{n}P_j(x)}.$$

用$M(u)$和$N(v)$表示互余的N函数, 关于N函数的定义及其学者见文[7], 由N函数$M(u)$生成的Orlicz空间$L_M^*[0,1]$ 是指具有有限的Orlicz范数

$$\|u\|_M=\sup_{\rho(v,N)\le1}|\int_0^1u(x)v(x)\mathrm{d}x|$$

的可测函数$u(x)$的全体,其中$\rho(v,N)=\int_0^1N(v(x))\mathrm{d}x$是$v(x)$关于$N(v)$的模.

由文[7]知, Orlicz范数还可由$\|u\|_M=\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}(1+\int_0^1M(\beta u(x))\mathrm{d}x)$ 计算, 并且存在$\beta>0$满足$\int_0^1N(p(\beta|u(x)|))\mathrm{d}x=1$, 使得

$$\|u\|_M=\frac{1}{\beta}(1+\int_0^1M(\beta u(x))\mathrm{d}x),$$

这里$p(u)$是$M(u)$ 的右导数.

对于$f\in L_M^*[0,1]$, 定义K-泛函和连续模如下:

$$K(f,t)_M=\inf_{g\in AC[0,1],g'\in L_M^*[0,1]}\{\|f-g\|_M+t\|g'\|_M\};$$
$$\omega(f,t)_M=\sup_{0\le h\le t}\|f(\cdot+h)-f(\cdot-h)\|_M.$$

由文[8]有$K(f,t)_M\sim\omega(f,t)_M$.

本文的主要结果是

定理1.1　设$f(x)\in L_M^*[0,1]$, 若对所有的$n\ge1$, 有$\lambda_{n+1}-\lambda_n\ge An^\alpha(\frac{1}{2}\le\alpha<\infty)$, 则存在一个依赖于$A$的正常数$C_A$使得$\|f-r\|_M\le C_A\omega(f,\frac{1}{n})_M$.

定理1.2　设$\{\lambda_n\}$满足定理1.1的条件, 则对于在区间$[0,1]$上非负且不恒为零的$f(x)\in L_M^*[0,1]$, 存在$[0,1]$ 上的可测函数$g(x)$满足

$$\|f-\frac{1}{K_n^*(g^{-1})}\|_M\le C_A\omega(f,\frac{1}{n})_M.$$

注　文中C_A表示仅与A有关的正常数, 在不同的地方取不同的值, 以下同.

2. 若干引理

引理2.1[2]　设$x\in[x_{j-1},x_j]$, 则对一切$k=0,1,\cdots,j-2,j+1,\cdots,n$均有

$$r_k(x)\le C_A\mathrm{e}^{-A|\sqrt{j}-\sqrt{k}|}.$$

引理2.2　$K_n^*(f)$是一致有界的正线性算子, 则有$\|K_n^*(f)\|_M\le C_A\|f\|_M$.

证 由文[2]知, 对任意的$k=0,1,\cdots,n$, 均有$\int_0^1 r_k(x)\mathrm{d}x\le \frac{C_A}{n}$. 故由$N$函数$M(u)$ 凸性与Jensen不等式可以推出

$$\begin{aligned}\|K_n^*(f,x)\| &= \inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}(1+\int_0^1 M(\beta K_n^*(f,x))\mathrm{d}x)\\ &= \inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}(1+\int_0^1 M(\beta n\sum_{k=1}^n r_k(x)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}x)\\ &\le \inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}(1+\int_0^1 \sum_{k=1}^n r_k(x)M(n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \beta f(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}x)\\ &= \inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}(1+\int_0^1 r_k(x)\mathrm{d}x\sum_{k=1}^n M(n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \beta f(t)\mathrm{d}t))\\ &\le C_A\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}(1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M(\beta f(t))\mathrm{d}t)\\ &\le C_A\inf_{\beta>0}(1+\int_0^1 M(\beta f(t))\mathrm{d}t)\le C_A\|f\|_M.\end{aligned}$$

引理2.3[2] 对于任意的$x\in[0,1]$, 下式成立$|K_n^*(|t-x|,x)|\le\frac{C}{n}$.

引理2.4[9] 设$f\in L_M^*[0,1]$,$\theta_f(x)$为f的Hardy-Littlewood极大函数

$$\theta_f(x)=\sup_{h>0}|\frac{1}{h}\int_0^h f(x+u)\mathrm{d}u|,$$

则$\|\theta_f\|_M\le C\|f\|_M$.

引理2.5[10] 设$B_n=C_n\{[\frac{\sin\frac{n(t-\delta_n)}{2}}{\sin\frac{t-\delta_n}{2}}]^4+[\frac{\sin\frac{n(t+\delta_n)}{2}}{\sin\frac{t+\delta_n}{2}}]^4\}$ 是修正的Jackson核, 这里$\delta_n=\frac{\pi}{2n}$, C_n满足$\int_{-\pi}^{\pi}B_n(t)\mathrm{d}t=1$. 若$f\in L_M^*[0,1], f(x)\ge 0, f(x)$ 不恒为零, 定义$\Lambda_n(f,x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+s)B_n(s)\mathrm{d}s$, 那么

$$\|f-\Lambda_n(f)\|_M\le C\omega(f,\frac{1}{n})_M,\quad \omega(\Lambda_n(f),t)_M\sim C\omega(f,t)_M,$$
$$\sup_{-\pi\le x\le\pi}\frac{\Lambda_n(f,x)}{\Lambda_n(f,x+t)}\le C(1+n|t|)^4.$$

引理2.6[11] 设$f\in L_M^*[0,1]$, 把$F_n(x)\in L_M^*[-1,2]$, 即

$$F_n(x)=\begin{cases} n\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)\mathrm{d}t, x\in[-1,0]\\ f(x), x\in[0,1]\\ n\int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(t)\mathrm{d}t, x\in[1,2],\end{cases}$$

则$\omega(F_n,\frac{1}{n})_{M[-1,2]}\sim C\omega(f,\frac{1}{n})_{M[0,1]}$.

引理2.7 设$x\in[x_{j-1},x_j]$, 则对一切$k=0,1,\cdots,j-2,j+1,\cdots,n$. 均有

$$|x-x_k|\le\frac{|j-k|}{n}.$$

证 1)如果$x_k\le x_{j-1}$, 则$|x-x_k|\le|x_j-x_k|=\frac{|j-k|}{n}$.

2)如果$x_j\le x_k$, 则$|x-x_k|\le|x_{j-1}-x_k|$, 证明过程与1)相似.

3. 定理的证明

定理1.1的证明 当$f\in L_M^*[0,1]$时, 显然$K_n^*(f,x)\in R_n(\Lambda)$, 令$r(x)=K_n^*(f,x)$, 对于满足$g\in AC[0,1], g'\in L_M^*[0,1]$的任意$g$, 由$K$-泛函与连续模的等价性及引理2.2知

$$\|K_n^*(f)-f\|_M\le\|K_n^*(f)-K_n^*(g)\|_M+\|K_n^*(g)-g\|_M+\|f-g\|_M \tag{3.1}$$

$$\leq C_A\|f-g\|_M+\|K_n^*(g)-g\|_M. \tag{3.2}$$

下面我们来估计$\|K_n^*(g)-g\|_M$.

由极大函数定义知

$$|K_n^*(g,x)-g(x)|\leq n\sum_{k=1}^{n}r_k(x)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|g(t)-g(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leq \theta_{g'}(x)K_n^*(|t-x|,x),$$

再由引理2.3,2.4知$|K_n^*(g,x)-g(x)|\leq \frac{C_A}{n}\theta_{g'}(x)\leq \frac{C_A}{n}\|g'\|_M$, 故

$$\|K_n^*(g,x)-g(x)\|_M=\sup_{\rho(v,N)\leq 1}|\int_0^1(K_n^*(g,x)-g(x))v(x)\mathrm{d}x| \tag{3.3}$$

$$\leq \sup_{\rho(v,N)\leq 1}|\int_0^1(K_n^*(g,x)-g(x))|v(x)\mathrm{d}x\leq \frac{C_A}{n}\|g'\|_M. \tag{3.4}$$

从而运用K-泛函与连续模的等价关系即可证明

$$\|K_n^*(f)-f\|_M\leq C_A(\|f-g\|_M+\frac{1}{n}\|g'\|_M).$$

由g的任意性我们得出$\|K_n^*(f)-f\|_M\leq C_AK(f,\frac{1}{n})_M\leq C_A\omega(f,\frac{1}{n})_M$. 定理得证.

定理1.2的证明　因为$f\in L_M^*[0,1]$在区间$[0,1]$上不变号, 不妨假设$f(x)\geq 0$且不恒等于非零的常数C(否则, 若$f(x)\equiv C, C\neq 0$, 则令$g(x)=f(x)$即可则知结论成立). 把$f(x)$按引理2.6的方法延拓成$F_n(x)\in L_M^*[-1,2]$, 对任意的$\varepsilon>0$记$\tilde{g}(x)=\hat{F}_n(x)+\varepsilon$, 很显然, 由$f(x)\geq 0$知$\tilde{g}(x)\geq\varepsilon$, 这里$\hat{F}_n(x)$是$F_n(x)$是二阶Steklov平均函数, 记

$$\hat{F}_n(x)=(F_n(x))_{hh},$$
$$(F_n(x))_{hh}=\frac{1}{h}\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}}(F_n(u))_h\mathrm{d}u.$$

对于$x\in[-1,2]$, 取$x=\frac{3\cos\theta+1}{2}, |\theta|\leq\pi, \tilde{G}(\theta)=\tilde{g}(\frac{3\cos\theta+1}{2})$, 定义

$$g(x)=\Lambda_n(\tilde{G},\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{g}(\frac{3\cos(\theta+s)+1}{2})B_n(s)\mathrm{d}s.$$

由$g(x)\geq 0$知, $g(x)$则满足引理2.5的条件, 再由文[7]的定理1.1的证明有

$$\omega(\hat{F}_n,\frac{1}{n})_M\leq\omega(F_n,\frac{1}{n})_{M[-1,2]}\leq\omega(f,\frac{1}{n})_{M[0,1]},$$
$$\|g-\tilde{g}\|_M\leq\omega(f,\frac{1}{n})_M.$$

对于正线性算子

$$K_n^*(f,x)=n\sum_{k=1}^{n}r_k(x)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(t)\mathrm{d}t,$$

则根据Cauchy-Schwarz不等式得

$$K_n^*(g,x)K_n^*(g^{-1},x)\geq K_n^*(1,x)=1.$$

因此

$$\frac{1}{K_n^*(g^{-1},x)}\leq K_n^*(g,x).$$

对区间$[0,1]$划分为E_1,E_2两部分. 令

$$E_1=\{x\in[0,1]:g(x)\leq\frac{1}{K_n^*(g^{-1},x)}\},\quad E_2=[0,1]\setminus E_1.$$

对于$x\in E_1$, 由定理1.1有

$$\|g-\frac{1}{K_n^*(g^{-1})}\|_{M(E_1)}\le\|K_n^*(g)-g\|_{M(E_1)}\le\|K_n^*(g)-g\|_M\le\frac{C_A}{n}\|g'\|_M.$$

对于$x\in E_2$, 由$\frac{1}{K_n^*(g^{-1},x)}\le g(x)$, 得

$$\begin{aligned}|g(x)-\frac{1}{K_n^*(g^{-1},x)}|&=|\frac{g(x)}{K_n^*(g^{-1},x)}(K_n^*(g^{-1},x))-\frac{1}{g(x)}|\\&=|\frac{g(x)}{K_n^*(g^{-1},x)}K_n^*(\frac{1}{g(t)}-\frac{1}{g(x)},x)|\\&=|\frac{g(x)}{K_n^*(g^{-1},x)}n\sum_{k=1}^n r_k(x)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(\frac{1}{g(t)}-\frac{1}{g(x)})\mathrm{d}t|\\&\le|g^2(x)n\sum_{k=1}^n r_k(x)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(\frac{g(x)-g(t)}{g(t)g(x)})\mathrm{d}t|\\&\le n\sum_{k=1}^n r_k(x)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(|g(x)-g(t)|)\frac{g(x)}{g(t)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由$g(x)$的定义及引理2.5得

$$\begin{aligned}|g(x)-\frac{1}{K_n^*(g^{-1},x)}|&\le C_An\sum_{k=1}^n r_k(x)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|g(x)-g(t)|[1+n(|x-t|)]^4\mathrm{d}t\\&\le C_An\sum_{k=1}^n r_k(x)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\int_t^x g'(u)\mathrm{d}u|[1+n(|x-t|)]^4\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

由引理2.1,2.4,2.7有

$$\begin{aligned}&|g(x)-\frac{1}{K_n^*(g^{-1},x)}|\\&\le C_An\sum_{k=1}^n r_k(x)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\int_t^x g'(u)\mathrm{d}u|[1+n\max(|x-x_k|,|x-x_{k-1}|)]^4\mathrm{d}t\\&\le C_An\sum_{k=1}^n r_k(x)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\theta_{g'}(x)|x-t|\mathrm{d}t[1+n\max(|x-x_k|,|x-x_{k-1}|)]^4\\&\le C_An\sum_{k=1}^n r_k(x)\theta_{g'}(x)\frac{1}{n}\max(|x-x_k|,|x-x_{k-1}|)[1+n\max(|x-x_k|,|x-x_{k-1}|)]^4\\&\le\frac{C_A}{n}n\sum_{k=1}^n r_k(x)\theta_{g'}(x)\max(\frac{|j-k|}{n},\frac{|j-k+1|}{n})[1+n\max(\frac{|j-k|}{n},\frac{|j-k+1|}{n})]^4\\&\le\frac{C_A}{n}n\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{-A|\sqrt{j}-\sqrt{k}|}\theta_{g'}(x)\max(|j-k|,|j-k+1|)[1+n\max(|j-k|,|j-k+1|)]^4\\&\le\frac{C_A}{n}n\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{-A|\sqrt{j}-\sqrt{k}|}\theta_{g'}(x)[1+\max(|j-k|,|j-k+1|)]^5\le\frac{C_A}{n}n\theta_{g'}(x).\end{aligned}$$

所以

$$\|g-\frac{1}{K_n^*(g^{-1})}\|_{M(E_2)}\le\frac{C_A}{n}\|\theta_{g'}\|_{M(E_2)}\le\frac{C_A}{n}\|g'\|_M.$$

因此

$$\|g-\frac{1}{K_n^*(g^{-1})}\|_M\le\|g-\frac{1}{K_n^*(g^{-1})}\|_{M(E_1)}+\|g-\frac{1}{K_n^*(g^{-1})}\|_{M(E_2)}\le\frac{C_A}{n}\|g'\|_M.$$

从而运用K-泛函与连续模的等价关系即可证明

$$\begin{aligned}\|f-\frac{1}{K_n^*(g^{-1})}\|_M &\le \|f-g\|_M+\|g-\frac{1}{K_n^*(g^{-1})}\|_M\\ &\le C_A(\|f-g\|_M+\frac{1}{n}\|g'\|_M)\\ &\le C_A K(f,\frac{1}{n})_M \le C_A\omega(f,\frac{1}{n})_M.\end{aligned}$$

定理得证.

参考文献:

[1] MUNTZ C M. Uber den Approximation von Weierstrass[M]. SCHWARZ H A F.Berlin:Mathmatische Abhandlungen,1941.

[2] 唐秀娟. Lp空间上的Muntz有理逼近[J]. 公安海警学院学报, 2015, 12(2): 37-40.

[3] 许贵桥. 利用正系数多项式的倒数逼近非负连续函数的一个收敛估计[J]. 工程数学学报, 1996, 13(4): 112-116.

[4] ZHAO Yi, ZHOU Songping. Approximation by reciprocals of polynomials with positive coefficients in Lp spaces[J]. Acta Math. Hungar, 2001, 92(3): 205-217.

[5] 梅海峰. Lp$[-1,1](1\le p<\infty)$空间中复系数多项式的倒数逼近[J]. 工程数学学报, 2003, 20(1): 111-114.

[6] CAO Feilong. Pointwise and globai estimates for reciorocal approximation of polynomials with positive coefficients[J]. Mathematica Applicate, 2003, 16(1): 65-69.

[7] 吴从炘, 王延辅. 奥尔里奇空间及其应用[M]. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1983.

[8] WU Garidi. On approximation by polynomials in orlicz spaces[J]. Approximation Theory And Its Applications, 1991, 7(3): 97-110.

[9] 谢敦礼. 连续正算子L_M^*逼近的阶[J]. 杭州大学学报, 1981, 8(2): 142-146.

[10] DEVORE R A, LEVIATAN D, XIANG Ming Yu. Approximation by reciprocals trigonometric and algebraic polynomials[J]. Canada Math Bull, 1990(33): 460-469.

[11] 吴嘎日迪, 海莲. Orlicz空间内的Muntz有理逼近[J]. 应用数学, 2014, 27(1): 44-49.

[12] RAMAZANOV A R K. On approximation by polynomials and rational functions in orlicz spaces[J]. Analysis Mathematica, 1984, 10(2): 117-132.

Rational Approximation of Muntz in Orlicz Spaces

WANG Yaru , WU Garidi

(*School of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot 010022, China*)

Abstract: In this paper, we study Muntz rational approximation problems in Orlicz spaces, compare with previous studies on similar problems and tries to improve the index $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ meet the conditions. Using the Hölder inequality, Hardy-Littlewoods maximal function, K-functional continuous modulus and convexity of N-function techniques, the Jackson type theorem of approximation is obtained. Since Orlicz space's topological structure is more complex than continuous function space and Lp spaces, the results of this paper have certain expansion significance.

Key words: Muntz rational approximation; Orlicz space; Approximation; Jackson theorem