应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2020, 33(3): 620-633

一类非线性项的二维波动方程解的生命跨度研究

王虎生, 孙海霞
(西南交通大学数学学院, 四川 成都 611756)

摘要: 本文考虑非线性项加权的二维波动方程的柯西问题, 在小初值的前提下, 研究经典解的生命跨度, 同时给出生命跨度的上界和下界估计, 推广前人已有的结果.

关键词: 波动方程; 经典解; 爆破; 生命跨度
中图分类号: O175.6 **AMS(2000)主题分类:** 35A01; 35B44
文献标识码: A **文章编号:** 1001-9847(2020)03-0620-14

1. 引言

本文考虑如下的二维波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2\Delta u=\frac{|u|^p}{(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}}, & (x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,\infty), \\ u(x,0)=\varepsilon f(x), u_t(x,0)=\varepsilon g(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中ε是充分小的正常数, $f(x), g(x)$为具有紧支集的光滑函数, $p>1$.

我们首先回顾经典的相关结论. 在上世纪80年代, STRAUSS对于波动方程具有紧支集的小初值问题的经典解提出一个猜想, 即对于如下的波动方程

$$u_{tt}-c^2\Delta u=|u|^p \tag{1.2}$$

的柯西问题有如下结论：当$n\geq 2$, 在初值足够小且具有紧支集时, 存在一个临界指数$p_0(n)$, 当$p>p_0(n)$时, 该方程存在整体解, $p\leq p_0(n)$ 时则其解在有限时间内爆破, 其中$p_0(n)$是二次方程$\tau(p,0)=0$的正实根, 这里$\tau(p,0)=\frac{1}{2}(n-1)p^2-\frac{1}{2}(n+1)p-1$.

上述猜想在上世纪末已得到完美解决. 关于该猜想的爆破情形在$n=2$时由ROBERT[1]在1981年得到证明, $n=3$时则由FRITZ[2]在1979 年得到证明, 当$n\geq 4$时, 爆破结论的证明由THOMAS[3]在1987年得到. 另一方面, 该猜想关于整体解的存在性在$n=2$和$n=3$分别由 ROBERT[4]在1981年和JOHN[2]在1979年得到验证, YI[5]在1995年得到$n=4$的情形, HANS和CHRISTOPHER[6]于1997年得到$3\leq n\leq 8$,并最终由VLADIMIR, HANS和CHRISTOPHER[7]于1997年延拓到$n>8$的情形.

当整体解不存在时(即$p\leq p_0(n)$时), 对解的最大时间的存在区间即解的生命跨度的研究就显得很有必要. 对二维的情形而言, 1992年, RENTARO和HIROYUKI[8]得到$p<p_0(2)$时, 在初值具有紧支集且满足$f(x)=0, g(x)\geq 0$时, 得到方程(1.2) 的解的生命跨度的上界估计

$$T_1(\varepsilon)\leq c\varepsilon^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{2}{p-1})^{-1}}, \tag{1.3}$$

* **收稿日期:** 2019-06-03
基金项目: 国家自然科学基金资助(71572156)
作者简介: 王虎生, 男, 汉族, 山西人, 研究方向: 偏微分方程.

c为一依赖$p, g(x)$的正常数. 而当初值不具有紧支集，但在具有衰减条件$D^{\alpha}f(x), D^{\beta}g(x)=O(|x|^{-1-k}), |\alpha|\leq 3, |\beta|\leq 2, k>0$的前提假设下, 满足$f(x)=0, g(x)\geq \varepsilon(1+|x|)^{-1-k}$时, 得到其生命跨度的上界估计

$$T_2(\varepsilon)\leq c\varepsilon^{(k-\frac{2}{p-1})^{-1}},\ 0<k<\frac{2}{p-1}, \tag{1.4}$$

比较这两种上界估计, 若$\frac{1}{2}+\frac{1}{p}<k$,则$T_1(\varepsilon)<T_2(\varepsilon)$,即(1.3)的上界估计要比(1.4)的上界估计要好. 1993年, YI[9]得到$n=2, p=p_0(2)$时, 关于方程解的生命跨度T_0^* 的上界和下界有如下估计

$$\exp(A\varepsilon^{-p(p-1)})\leq T_0^*\leq \exp(B\varepsilon^{-p(p-1)}),$$

这里A, B都是与ε无关的常数. 这里我们可以看出$T_0^*\approx \exp(\varepsilon^{-p(p-1)})$,(符号$\approx$表示: 当$A\approx B$,即存在正常数$C, c$,使得$cB\leq A\leq CB$.) 此结果也称为门槛(sharp)结果, 即生命跨度的上下界关于ε的阶是一致的.

2005年, 文[10]在$n=2,3$且初值满足$f(x)=0, g(x)\geq 0, f(0)>0$的前提下, 可知方程(1.2)经典解的生命跨度的上界估计

$$\begin{cases} T_0^*=\infty, & p>p_0(n),\\ T_0^*\leq \exp(C^*\varepsilon^{-p(p-1)}), & p=p_0(n),\\ T_0^*\leq C^*\varepsilon^{p(p-1)/\tau(p,0)}, & p<p_0(n). \end{cases} \tag{1.5}$$

当$n=1$时, 无论初值有多小, 方程(1.2)的柯西问题的经典解总会爆破. YI[11]得到$n=1$时对于任意的$p>1$解的生命跨度T_0^*的上界和下界估计

$$c\varepsilon^{-\frac{p-1}{2}}\leq T_0^*\leq C\varepsilon^{-\frac{p-1}{2}},$$

这里c, C都是与ε无关的常数. 这里我们可以看出$T_0^*\sim \varepsilon^{-\frac{p-1}{2}}$, 此结果也称为门槛结果.

注意到, 当$n\geq 2$时, 方程(1.2)的齐次方程解相当于有一个衰减估计$|u(x,t)|\leq (t+1)^{-\frac{n-1}{2}}$, 即当$t\to\infty$时, $|u(x,t)|\to 0$,但$n=1$时却没有这一性质, 这一性质正是证明 STRAUSS 猜想的关键所在, 这样就启发我们为了得到一维波动方程的整体解需在非线性项中引入加权项$(1+x^2)^{-m/2}$,此时有方程

$$u_{tt}-u_{xx}=\frac{|u|^p}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}}, (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T], m>0. \tag{1.6}$$

2013年, HIDEO, AYAKO, MUHAMMET[12]在初值满足$f\equiv 0, g>0, g\in C^1(\mathbb{R}), \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} g(y)\mathrm{d}y>0, \delta\in(0,1)$的前提下, 通过迭代的方法得到解生命跨度的上界$T_m^*\leq C\varepsilon^{-p^2}$, C为常数. 2014年, KYOUHEI[13]在初值满足$f\equiv 0, g\in C^1(\mathbb{R})$, 对任意的$x, g(x)>0, \int_{-1}^{1} g(y)\mathrm{d}y>0$的前提下, 也通过迭代的方法得到方程(1.6)柯西问题解生命跨度的上界估计

$$T_m^*\leq \begin{cases} c\varepsilon^{-(p-1)/(2-m)}, & 0\leq m<1,\\ \phi^{-1}(c\varepsilon^{-(p-1)}), & m=1,\\ c\varepsilon^{-(p-1)}, & m>1, \end{cases}$$

而在初值满足$f\in C^2, g\in C^1, \|f\|_{L^\infty(R)}<\infty, \|g\|_{L^1(R)}<\infty$的前提假设下, 得到解生命跨度的下界估计

$$T_m^*\geq \begin{cases} c\varepsilon^{-(p-1)/(2-m)}, & 0\leq m<1,\\ \phi^{-1}(c\varepsilon^{-(p-1)}), & m=1,\\ c\varepsilon^{-(p-1)}, & m>1, \end{cases}$$

其中$p>1, c=c(f,g,m,p), \phi(s)=s\log(2+s), s\geq 0$.

基于上述分析, 本文也考虑在空间维数$n=2$时在非线性项中引入加权项后讨论方程(1.1) 的柯西问题, 希望得到类似 STRAUSS 猜想的结论, 即存在一临界指数$p_m(2)$和$p_m^\circ(2)$,

当$p > p_m(2)$及$p > p_m^{\circ}(2)$整体解存在, 相反, 解将在有限时间内爆破. 同时, 由于非线性项中引入了衰减的加权项, 本文希望得到的结果比没有衰减加权项时要好, 这也是本文的创新之处.

本文的主要结论如下, 首先考虑方程(1.1)柯西问题的解的生命跨度的下界研究.

定理1.1 假设初值$f(x) \in C_0^3$, $g(x) \in C_0^2$, 且满足如下条件

1)具有紧支集, 即存在$R > 0$,有

$$\operatorname{supp}\left(f(x), g(x)\right) = \{x : |x| \le R\}, \tag{1.7}$$

2)存在正常数c,有

$$\sup\left\{\sum_{|\alpha|\le 1}|\partial_x^\alpha f(x)| + |g(x)|\right\} \le c, \tag{1.8}$$

记T_m^*为方程(1.1)解的生命跨度, 当$p > 3 - m, m \in [0,1]$时, 存在一个正常数$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(p, m, R)$使得对任意的$\varepsilon$, 当$0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, 有如下

$$\begin{cases} T_m^* = \infty, & \tau(p,m) > 0 (p > p_m(2)),\\ T_m^* \ge \exp(M^*\varepsilon^{p-p^2}), & \tau(p,m) = 0 (p = p_m(2)),\\ T_m^* \ge M^*\varepsilon^{p(p-1)/\tau(p,m)}, & \tau(p,m) < 0 (p < p_m(2)), \end{cases} \tag{1.9}$$

这里：M^*是一个与ε无关的常数, $\tau(p,m) = \frac{1}{2}p(p-3+m)-1$,$p_m(2)$是一元二次方程$\tau(p,m) = 0$的正实根.

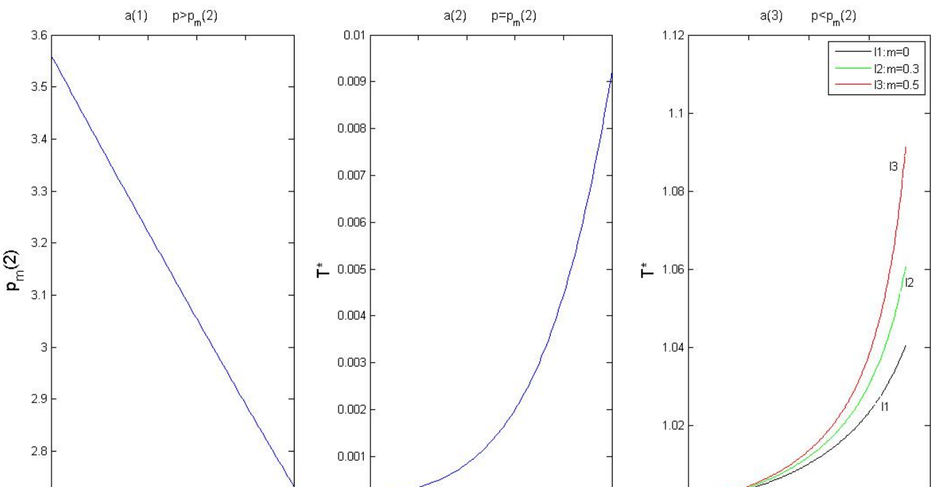

图1 二维波动方程解的生命跨度下界

注1.1 当初值满足(1.7)(1.8)时, 在方程(1.1)中取$m = 0$, 本文验证了方程(1.2)经典解的相关结论. 再者, 本文得到方程(1.2)的生命跨度的下界估计, 而文[10]给出了方程(1.2)的上界估计(1.5), 基于其上下界有相同的形式, 进而可以合成一门槛估计,即：.

$$T_0^* \approx \begin{cases} \infty, & p > p_0(2),\\ \exp(C^*\varepsilon^{-p(p-1)}), & p = p_0(2),\\ C^*\varepsilon^{p(p-1)/\tau(p,0)}, & p < p_0(2). \end{cases} \tag{1.10}$$

注1.2 当$p > p_m(2)$时, 考虑如上一元二次方程$\tau(p,m) = 0$的正实根, 得到$p_m(2) = \frac{3-m+\sqrt{m^2-6m+17}}{2}$,由图1中a(1) 知其导数$p_m{}'(2) < 0$,且$p_m(2) \le p_0(2)$, 我们知道在方程(1.2)的

非线性项引入加权函数后, 其更容易得到整体解. 当$p \le p_m(2)$时, 由图1中a(2)和a(3)可知, $T_m^* \ge T_0^*$. 显然, 非线性项引入加权函数后对参数p的要求有所减弱.

接下来, 本文考虑方程(1.1)的柯西问题经典解的生命跨度的上界估计.

定理1.2 假设初始条件$g(x) \in C(\mathbb{R}^2)$, 且满足对任意的x

$$f(x) = 0, g(x) > 0, \tag{1.11}$$

那么令$1 < p \le p_m^*(2)$,其中$p_m^*(2)$是一元二次方程$\gamma(p,m) = 0$的正实根, $\gamma(p,m) = \frac{1}{2}p(p-3+2m)-1$, 若满足$p > 3-2m, m \in (0,1)$,则方程(1.1) 的经典解在有限的时间内会爆破, 更进一步, 存在一个与ε无关的常数C^*, 使得

$$T_m^* \le \begin{cases} \exp(C^* \varepsilon^{p-p^2}), & p = p_m^*(2), \\ C^* \varepsilon^{p(p-1)/\gamma(p,m)}, & p < p_m^*(2). \end{cases} \tag{1.12}$$

而假设初值$f(x), g(x)$足够小, $0 < v < \frac{1}{2}$,取$r = |x|$, 且满足

$$\left\|(1+r)^{v+\frac{1}{2}} f(x,t)\right\|_{L^\infty}, \left\|(1+r)^{v+\frac{3}{2}} \nabla f(x,t)\right\|_{L^\infty}, \left\|(1+r)^{v+\frac{3}{2}} g(x,t)\right\|_{L^\infty} < \infty \tag{1.13}$$

时, $u(x,t) \in C([0,+\infty), \mathbb{R}^2)$, 定义范数$\|u(x,t)\| = \sup\left(\Lambda_{(-\frac{1}{2},-v)}(r,t)|u(x,t)|\right)$, 当$p > p_m^\circ(2)$时, 该方程存在整体解, 即

$$T_m^* = \infty, \tag{1.14}$$

这里$p_m^\circ(2)$是一元二次方程$\zeta(p,m) = 0$的正实根, $\zeta(p,m) = \frac{1}{2}p(p-3)+m-1$.

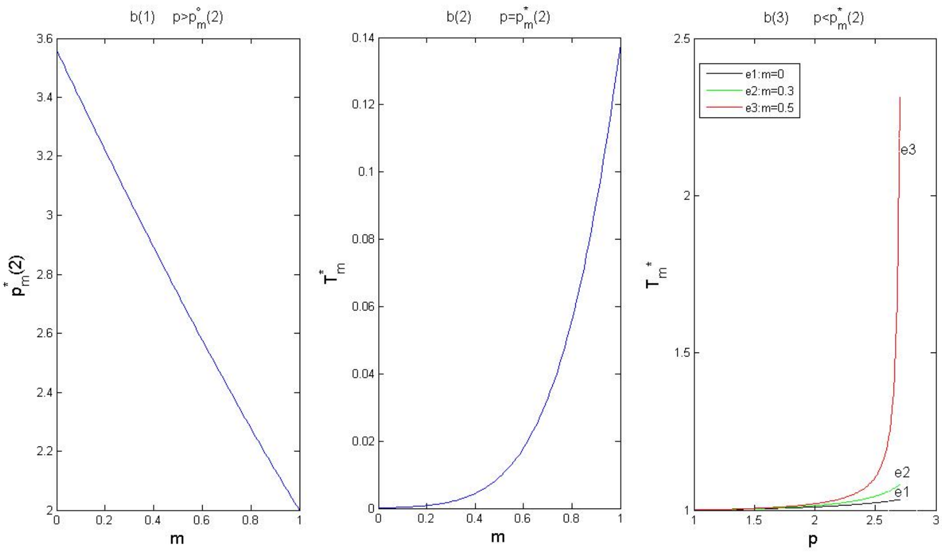

图2 二维波动方程解的生命跨度上界

注1.3 当$p > p_m^\circ(2)$时, 考虑方程$\zeta(p,m) = 0$的正实根$p_m^\circ(2), p_m^\circ(2) = \frac{3+\sqrt{17-8m}}{2}$, 由图2中b(1)易知$p_m^\circ(2) \le p_0^\circ(2)$, 显然在方程 (1.2) 的非线性项引入加权函数后, 其更容易得到整体解, 当$p \le p_m^*(2)$时, 由图2中b(2),b(3)可知$T_m^* \ge T_0^*$. 同解的生命跨度下界一样, 对于上界而言, 在非线性项引入加权函数后, 对参数p的要求同样减弱.

注1.4 取$m = 0$, 在初值满足假设(1.11)条件的基础上, 验证了方程(1.1)的经典解的生命跨度的上界, 即(1.3)中$p \le p_0(n)$ 的情形. 而在初值满足假设(1.13)条件的基础上验证了$p > p_0(n)$的情形.

注1.5 考虑方程(1.1)的经典解的爆破情形时, 由于与解的生命跨度的上界和下界相关的一元二次方程$\tau(p,m)=0,\gamma(p,m)=0,\zeta(p,m)=0$及其临界值$p_m(2),p_m^*(2),p_m^\circ(2)$并不相同, 故本文并没有得到方程(1.1)经典解的门槛估计.

2. 预备知识

利用降维法和齐次化原理, 方程 (1.1) 柯西问题的解可记为

$$u=u_0+w=u_0+L\left\{\frac{|u|^p}{(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}(x,t), \tag{2.1}$$

其中: u_0是二维齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2\Delta u=0,(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,\infty), \\ u(x,0)=\varepsilon f(x),u_t(x,0)=\varepsilon g(x) \end{cases} \tag{2.2}$$

的解, 即

$$u_0=\varepsilon\partial_t J[f(x,t)]+\varepsilon J[g(x,t)], \tag{2.3}$$

具体而言

$$\partial_t J[f(x,t)]=\frac{1}{2\pi c}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{ct}\frac{\rho f(x_1+\rho\cos\theta,x_2+\rho\sin\theta)}{\sqrt{(ct)^2-\rho^2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\right], \tag{2.4}$$

$$J[g(x,t)]=\frac{1}{2\pi c}\int_0^{2\pi}\int_0^{ct}\frac{\rho g(x_1+\rho\cos\theta,x_2+\rho\sin\theta)}{\sqrt{(ct)^2-\rho^2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho, \tag{2.5}$$

解的非齐次部分为

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{|u(x,t)|^p}{(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}=&\frac{1}{2\pi c^2}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\frac{|u(y,\frac{ct-r}{c})|^p}{\sqrt{((ct)^2-\rho^2)(1+|x|^2)^m}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ =&\frac{1}{2\pi c^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}s\int_0^{ct-s}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{(ct-s)^2-\rho^2}}\int_0^{2\pi}\frac{|u(y,\frac{s}{c})|^p}{(1+|y|^2)^{\frac{m}{2}}}\mathrm{d}\theta, \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中$y=x+\rho e,|e|=1,x,y,e\in\mathbb{R}^2,r=|x|$.

引理2.1 假设$f(x),g(x)$满足 (1.4) ,(1.5) 的条件, 设u_0是齐次方程 (2.2) 的解, 则有

$$|u_0(x,t)|\le M\varepsilon(1+t+r)^{-\frac{1}{2}}(1+|ct-r|)^{-\frac{1}{2}}.$$

这里$r=|x|,M$为与ε无关的常数, 证明过程参考文[4].

引理2.2 已知$Fr\in C([0,+\infty)),y=x+\rho w$, 且$x,w\in\mathbb{R}^2$, ρ为半径, $|w|=1$, 令$\lambda=|y|,h(\lambda,\rho,r)=(\rho^2-(\lambda-r)^2)^{-\frac{1}{2}}((\lambda+r)^2-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}$, 那么有

$$\int_0^{2\pi}Fr(|x+\rho w|)\mathrm{d}\theta=\int_{|\rho-r|}^{\rho+r}4\lambda h(\lambda,\rho,r)Fr(\lambda)\mathrm{d}\lambda. \tag{2.7}$$

证 由$\lambda=|y|$得到$\lambda=\sqrt{r^2+\rho^2+2\rho r\cos\theta},\theta\in[0,\pi]$, 则

$$\cos\theta=(\lambda^2-r^2-\rho^2)/2\rho r.$$

那么$\mathrm{d}\theta=\frac{-\lambda}{\rho r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\mathrm{d}\lambda=-2\lambda h(\rho,\lambda,r)\mathrm{d}\lambda$, 由于$h(\rho,\lambda,r)=h(\lambda,\rho,r)$, 进而得证.

接下来, 为了方便起见, 借助文[14]引入如下记号

$$\varLambda_{(\alpha,\beta)}(r,t)=(1+t+r)^{-\alpha}(1+|t-r|)^{-\beta},$$

$$\varPhi_k(r,t)=\begin{cases}\varLambda_{(\frac{1}{2},k)}(r,t), & k>0,\ r\ge t, \\ \varLambda_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}-[\frac{1}{2}-k]_+)}(r,t), & k>0,\ r<t,\end{cases}$$

$$\varPsi_\mu(t)=\begin{cases}(1+t)^{-\mu}, & \mu<0, \\ 1+\log(1+t), & \mu=0, \\ 1, & \mu>0.\end{cases}$$

引理2.3 定义如下积分$I_z(r,t)$

$$I_z(r,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{ct}\mathrm{d}s\int_0^{ct-s}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{(ct-s)^2-\rho^2}}\int_{|\rho-r|}^{\rho+r}\sqrt{\lambda}h(\lambda,\rho,r)\Lambda_{(1+k,1+\mu)}(\lambda,s)\mathrm{d}\lambda,$$

$k\in\mathbb{R},\mu\in\mathbb{R}$, 那么有$I_z(r,t)\le C\Phi_k(r,ct)\cdot\Psi_\mu(ct+r)$.

证明过程参考文[14]的命题3.1.

引理2.4 定义$G\in C(\mathbb{R}^2),\phi\in C([0,+\infty))$,如果$G(x)\ge\phi(|x|)\ge 0$, 当满足$(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,+\infty)$, 那么

$$|J\left[G(x,t)\right]|\ge\frac{1}{2r^{1/2}}\int_{|r-ct|}^{r+ct}\lambda^{\frac{1}{2}}\phi(\lambda)\mathrm{d}\lambda. \tag{2.8}$$

若$G\in C(\mathbb{R}^2),g\in C(\mathbb{R}^2),|G(x)|\le g(|x|),(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,+\infty)$, 那么有

$$|J[G(x,t)]|\le\frac{1}{c}\int_{|r-ct|}^{r+ct}\lambda g(\lambda)\left[(r+\lambda)^2-(ct)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda+\frac{1}{c}\int_0^{[ct-r]_+}\lambda g(\lambda)\left[(ct)^2-(r+\lambda)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda. \tag{2.9}$$

进一步而言, 定义$F\in C(\mathbb{R}^2\times[0,T)),\psi\in C([0,+\infty)\times[0,T))$, 假定$F(x,t)\ge\psi(|x|,t)\ge 0$,当$(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,T)$,$D(r,t)=\left\{(\lambda,s)\in[0,+\infty)^2:0\le s\le t,|r-c(t-s)|\le\lambda\le r+c(t-s)\right\}$
那么

$$|L\left[F(x,t)\right]|\ge\frac{1}{2r^{1/2}}\iint_{D(r,t)}\lambda^{1/2}\psi(\lambda,s)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s, \tag{2.10}$$

$f(x,t)\in C([0,+\infty)\times[0,T))$, 且假定两者满足如下$|F(x,t)|\le f(|x|,t)$, 那么有

$$\begin{aligned}|L[F(x,t)]|\le&\frac{1}{c}\iint_{D(r,t)}\lambda f(\lambda,s)[(r+\lambda)^2-c^2(t-s)^2]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s\\&+\frac{1}{c}\iint_{D'(r,t)}\lambda f(\lambda,s)[c^2(t-s)^2-(r+\lambda)^2]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中$D'(r,t)=\{(\lambda,s)\in[0,+\infty)^2:0\le\lambda\le c(t-s)-r\}$.

证明过程参考文[10]命题2.1.

引理2.5 已知$C_1,C_2>0,A,B\ge 0,\ b>0,k\le 1,p>1,\varepsilon\in(0,1],ys\in\mathbb{R}$, 假设$f(ys)$满足如下

$$f(ys)\ge C_1\varepsilon^A,f(ys)\ge C_2\varepsilon^B\int_1^{ys}\left(1-\frac{\eta}{ys}\right)^b\frac{f(\eta)^p}{(1+\eta)^k}\mathrm{d}\eta,$$

那么, $f(ys)$在有限的时间$T_*(\varepsilon)$内会爆破, 而且存在一正常数$C^*=C^*(C_1,C_2,b,p,k)$, 成立

$$T_*(\varepsilon)\le\begin{cases}\exp(C^*\varepsilon^{-\{(p-1)A+B\}}), & k=1,\\ C^*\varepsilon^{-\{(p-1)A+B\}/(1-k)}, & k<1.\end{cases}$$

证明过程参考文[10]引理 2.3.

引理2.6 对于$k>0$存在常数$C=C(k)>0$,易知如下成立：

$$\int_{|r-t|}^{r+t}(1+\rho)^{-1-k}\mathrm{d}\rho\le C\min\{t,r\}\Lambda_{(1,k)}(r,t), \tag{2.12}$$

$$\int_{|r-t|}^{r+t}(1+\rho)^{-\frac{1}{2}-k}(\rho+r-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\rho\le C\Lambda_{(0,k)}(r,t), \tag{2.13}$$

$$\int_0^{[t-r]_+}(1+\rho)^{-\frac{1}{2}-k}(t-r-\rho)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\rho\le C\Lambda_{(0,-\frac{1}{2}+[\frac{1}{2}-k]_+)}(r,t). \tag{2.14}$$

3. 基本估计

首先, 本文建立方程 (1.1) 的经典解的生命跨度的下界估计, 在初值满足定理1.1中的条件时, 根据半群理论及压缩映射原理, 即易知存在时间$T_0 = T_0(\varepsilon, p, m, f, g, R)$, 使得方程在$t \in [0, T_0]$存在局部解.

引理2.1对齐次方程解建立了先验估计, 现给出如下非齐次项的估计.

命题3.1 如果$k \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, T > 0, C$为常数, 对于$(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,T)$, 有

$$L\left\{\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{m/2}}\right\} \le C\Phi_k(r,ct)\Psi_\mu(ct+r)\sup\left\{\frac{|y|^2}{(1+|y|^2)^{m/2}}\Lambda_{(-k-1,-\mu-1)}(|y|,s)|u(y,\frac{s}{c})|^p\right\}. \tag{3.1}$$

证 根据方程(1.1)的解的非齐次部分的表达式, 有

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{m/2}}\right\} =& \frac{1}{2\pi c^2}\int_0^{ct}\mathrm{d}s\int_0^{ct-s}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{(ct-s)^2-\rho^2}}\int_0^{2\pi}\frac{\left|u(y,\frac{s}{c})\right|^p}{(1+|y|^2)^{m/2}}\mathrm{d}\theta \\ \le& \frac{1}{2\pi c^2}\int_0^{ct}\mathrm{d}s\int_0^{ct-s}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{(ct-s)^2-\rho^2}}\int_0^{2\pi}\frac{\Lambda_{(1+k,1+\mu)(|y|,s)}}{|y|^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}\theta\cdot S(|y|,s,k,\mu), \end{aligned}$$

这里, 我们令

$$S(|y|,s,k,\mu) = \sup\left\{\frac{|y|^{\frac{1}{2}}}{(1+|y|^2)^{\frac{1}{2}}}\Lambda_{(-1-k,-1-\mu)}(|y|,s)|\mu(y,\frac{s}{c})|^p\right\}.$$

根据引理2.2, 令$\lambda = |y|$有

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{m/2}}\right\} \le& \frac{2}{\pi c^2}\int_0^{ct}\mathrm{d}s\int_0^{ct-s}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{(ct-s)^2-\rho^2}} \\ & \int_{|\rho-r|}^{\rho+r}\sqrt{\lambda}h(\lambda,\rho,r)\Lambda_{(1+k,1+\mu)}(\lambda,s)\mathrm{d}\lambda\cdot S(\lambda,s,k.\mu). \end{aligned}$$

用$I_z(r,t)$定义如下积分：

$$I_z(r,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{ct}\mathrm{d}s\int_0^{ct-s}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{(ct-s)^2-\rho^2}}\int_{|\rho-r|}^{\rho+r}\frac{\sqrt{\lambda}h(\lambda,\rho,r)}{z(\lambda,s)}\mathrm{d}\lambda,$$

根据引理2.3, 可以得到(3.1).

注意到

$$w = L\left\{\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\} = u - u_0, \tag{3.2}$$

根据公式(3.2)显然有

$$|w| \le 2^{p-1}\left\{L\left\{\frac{|u_0|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\} + L\left\{\frac{|w|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}\right\}, \tag{3.3}$$

于是, 为了获得非齐次部分的估计, 我们需要对不等式(3.3)右边两项进行估计,方便起见, 记$p' = \frac{p-3+m}{2}$.

引理3.1 令$w \in C(\mathbb{R}^2 \times [0,T)), \mu \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}, m \in [0,1]$, 当$|w| \le 2^{p+1}M\varepsilon^p\Phi_{p'}(r,ct)$, 对于$(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,T)$, 当$|x| \le ct + R$时, 有

$$L\left\{\frac{|w|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\} \le M\varepsilon^p\Phi_{p'}(r,ct)\Psi_{pp'-1}(T). \tag{3.4}$$

证 用$w(x,t)$替换$u(x,t)$, 有

$$L\left\{\frac{|w|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}\le C\Phi_\xi(r,ct)\Psi_\mu(T)\sup_{(y,s)\in[0,T)}\{\frac{|y|^{\frac{1}{2}}}{(1+|y|^2)^{\frac{m}{2}}}\Lambda_{(-1-\xi,-1-\mu)}(|y|,s)|w(|y|,s)|^p\}$$
$$\le 2^{(p+1)p}CM^p\varepsilon^{p^2}\Phi_\xi(r,ct)\Psi_\mu(T)\sup_{(y,s)\in[0,T)}\{\frac{|y|^{\frac{1}{2}}}{(1+|y|^2)^{\frac{m}{2}}}\cdot\Lambda_{(-1-\xi,-1-\mu)}(|y|,s){\Phi_{p'}}^p(|y|,s)\}.$$

1)在$r>t$或者在$r\le t$, $0<p'\le\frac{1}{2}$时, 当满足$\xi=p',\mu=pp'-1$;

2)在$r\le t,p'>\frac{1}{2}$时, 当满足$\xi=p'$, $\mu=\frac{p}{2}-1$,有如下

$$\sup_{(y,s)\in[0,T)}\{\frac{|y|^{\frac{1}{2}}}{(1+|y|^2)^{\frac{m}{2}}}\Lambda_{(-1-\xi,-1-\mu)}(|y|,s){\Phi_{p'}}^p(|y|,s)\}\le 2^{-\frac{m}{2}}.$$

存在ε, 使得$0<\varepsilon\le\varepsilon_0,\varepsilon_0\in(0,1)$,令$2^{(p+1)p-\frac{m}{2}}CM^p\varepsilon_0^{p^2-p}\le M$, 当$0<p'\le\frac{1}{2}$时, 得到(3.4).

推论3.1 按照类似引理3.1的方法, 根据引理2.1, 有

$$L\left\{\frac{|u_0|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}\le M\varepsilon^p\Phi_{p'}(r,ct)\Psi_{p/2-1}(T)\le M\varepsilon^p\Phi_{p'}(r,ct).\tag{3.5}$$

4. 定理1.1的证明

为了获得w的上界, 先验假设

$$|w|\le 2^{p+1}M\varepsilon^p\Phi_{p'}(r,ct).\tag{4.1}$$

当$|x|\ge ct+R$时, $u(x,t)=v(x,t)=0$, 那么$\operatorname{supp} w=\{x:|x|\le ct+R\}$.

接下来, 我们对$\tau(p,m)$分三种情况讨论

命题4.1 假设$\tau(p,m)<0$, 令$p'>0$,那么对于$(x,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,T)$, 存在$\varepsilon_0=\varepsilon_0(p,m,R)$, 当$0<\varepsilon\le\varepsilon_0$时, 我们有

$$|w(x,t)|\le 2^pM\varepsilon^p\Phi_{p'}(r,ct).\tag{4.2}$$

证 由于$\tau(p,m)<0$,于是有$pp'-1<0$, 进而

$$L\left\{\frac{|w|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}\le 2^{(p+1)p-\frac{m}{2}}CM^p\varepsilon^{p^2}(1+T)^{-\tau(p,m)}\Phi_{p'}(r,ct).$$

根据引理3.1和推论3.1, 将其带入(3.3), 当满足$2^{(p+1)p-\frac{m}{2}}CM^p\varepsilon_0^{p^2-p}(1+T)^{-\tau(p,m)}\le M$ 时, 有

$$|w|\le 2^{p-1}\left\{L\left\{\frac{|u_0|^p}{(1+r^2)^{m/2}}\right\}+L\left\{\frac{|w|^p}{(1+r^2)^{m/2}}\right\}\right\}$$
$$\le 2^{p-1}\left\{M\varepsilon^p\Phi_{p'}(r,ct)+2^{p(p+1)-\frac{m}{2}}CM^p\varepsilon^{p^2}(1+T)^{-\tau(p,m)}\Phi_{p'}(r,ct)\right\}\le 2^pM\varepsilon^p\Phi_{p'}(r,ct).$$

命题4.2 假设$\tau(p,m)>0$, 那么对于$(x,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,T)$, 令$p'>0$, 存在$\varepsilon_0=\varepsilon_0(p,m)$, 当$0<\varepsilon\le\varepsilon_0$时, 我们有

$$|w(x,t)|\le 2^pM\varepsilon^p\Phi_{p'}(r,ct),\tag{4.3}$$

证 由于$\tau(p,m)>0$,那么显然$pp'-1>0$,于是

$$L\left\{\frac{|w|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}\le 2^{p(p+1)-\frac{m}{2}}CM^p\varepsilon^{p^2}\Phi_{p'}(r,ct).$$

根据引理 3.1 , 推论 3.1, 带入公式 (3.3)中 , 可知存在ε, 使得$0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ 当满足$2^{p(p+1)-\frac{m}{2}}CM^p\varepsilon_0^{p^2-p}\le M$时, 可以得到 (4.3).

命题4.3 假设$\tau(p,m)=0$, 那么对于$(x,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,T)$, 令$p'>0$, 存在$\varepsilon_0=\varepsilon_0(p,m,R)$, 当$0<\varepsilon\le\varepsilon_0$时, 有

$$|w(x,t)|\le 2^pM\varepsilon^p\Phi'_p(r,ct). \tag{4.4}$$

证 由于$\tau(p,m)=0$,那么显然$pp'-1=0$,于是

$$L\left\{\frac{|w|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}\le 2^{p(p+1)-\frac{m}{2}}CM^p\varepsilon^{p^2}\Phi_{p'}(r,ct)\left(1+\log(1+T)\right). \tag{4.5}$$

令$2^{p(p+1)-\frac{m}{2}}CM^p\varepsilon_0^{p^2-p}\left(1+\log(1+T)\right)\le M$, 根据引理3.1, 推论3.1, 代入公式(3.3), 得到(4.4).

定义$T_0(\varepsilon)$为u在$\mathbb{R}^2\times[0,T)$唯一解$T(\varepsilon)$的上确界. 根据局部存在定理及有限传播速度的性质, 有$0<T_0(\varepsilon)\le T_m^*$.

首先讨论$\tau(p,m)<0(\tau(p,m)=0$的情形与之类似).

对于命题4.1, 当

$$|w(x,t)|\le 2^pM\varepsilon^p\Phi_{p'}(r,ct) \tag{4.6}$$

成立, 需满足

$$2^{p(p+1)-\frac{m}{2}}AM^p\varepsilon_0^{p^2-p}(1+T)^{-\tau(p,m)}\le M. \tag{4.7}$$

换言之,存在与ε无关的常数M^*, 使得$\varepsilon_0^{p^2-p}(1+T)^{-\tau(p,m)}\le M^*$, 求解得到$T(\varepsilon)\ge M^*\varepsilon^{(p^2-p)/\tau(p,m)}-1$.

当$T(\varepsilon)$满足(4.7)时, $(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,T_1(\varepsilon))$, (4.6)成立. 更进一步, 有

$$|u(x,t)|=|u_0(x,t)|+|w(x,t)|\le M\varepsilon\Phi_{\frac{1}{2}}(r,ct)+2^pM\varepsilon^p\Phi_{p'}(r,ct)\le 2^pM\varepsilon\Phi_{p'}(r,ct). \tag{4.8}$$

根据$T_0(\varepsilon)$的定义, 可知$T_0(\varepsilon)\ge M^*\varepsilon^{(p^2-p)/\tau(p,m)}$,又因为$T_m^*\ge T_0(\varepsilon)$, 最终得到定理 1.1 中$\tau(p,m)<0$的情况.

接着讨论$\tau(p,m)>0$的情形.

假设$T_m^*<\infty$, 根据式子(3.6)可以得到如下: 对于$(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,T_0(\varepsilon))$, 式子(4.3)成立, 进一步, 可知

$$|u(x,t)|=|u_0(x,t)|+|w(x,t)|\le 2^pM\varepsilon\Phi_{p'}(r,ct). \tag{4.9}$$

由于$T_0(\varepsilon)\le T_m^*$. 根据$T_0(\varepsilon)$的定义, 可以得知存在$x_0\in\mathbb{R}^2$使得

$$|w(x_0,t)|\ge 2^{p+1}M\varepsilon^p\Phi_{p'}(r,ct),t\in[T_0(\varepsilon),T_m^*). \tag{4.10}$$

另一方面, 从命题4.2得知$|w(x,t)|\le 2^pM\varepsilon^p\Phi_{p'}(r,ct)$, 进而得到矛盾, 于是$T_m^*=\infty$, 最终得到定理1.1中$\tau(p,m)>0$的情况.

5. 定理1.2的证明

对于单个波动方程(1.1)的柯西问题研究, 类似于其下界估计,在一系列准备工作后, 我们先给出其基本估计, 然后再给出其先验估计.

基于条件(1.11)及(2.1)(2.3)我们容易得到

$$u(x,t)\ge\varepsilon J\left[g\right](x,t), \tag{5.1}$$

$$u(x,t)\ge L\left\{\frac{|u|^p}{(1+|x|^2)^{m/2}}\right\}. \tag{5.2}$$

接下来, 我们建立波动方程(1.1)柯西问题的经典解的估计.

首先, 令$p^*=\frac{1}{2}(p-3+2m)$,通过(1.11)得知存在函数$\phi_\delta(|x|)\in C(0,+\infty),\delta>0$,满足$g(x)\ge\phi_\delta(|x|)\ge 0$, 于是有

命题5.1　通过引理2.4中的(2.8), 可以建立对$J[G](x,t)$的基本估计, 令$|ct-r|\le \frac{\delta}{2}, ct+r\ge \delta$,取$C_0=\frac{1}{2}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta}\lambda^{\frac{1}{2}}\phi_\delta(\lambda)\mathrm{d}\lambda$, 根据引理2.4中的(2.8)及(5.1), 显然有

$$u(x,t)\ge C_0\varepsilon r^{-\frac{1}{2}}, \tag{5.3}$$

同时通过引理2.4中的(2.10)及(5.2), 可知对$L[F]$的基本估计, 即存在常数$C=C(g,\delta,m,c,p)$,得

$$u(x,t)\ge C\varepsilon^p r^{\frac{1}{2}}\Lambda_{(1,p*)}(r,ct). \tag{5.4}$$

证　当$(\lambda,s)\in D(r,t)$,根据 (2.10) (5.2) (5.3) 得知

$$u(x,t)\ge \frac{\varepsilon^p}{r^{\frac{1}{2}}}\iint_{E(\lambda,s)}\frac{\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p}}{(1+\lambda^2)^{\frac{m}{2}}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s\ge \frac{\varepsilon^p}{r^{\frac{1}{2}}}\iint_{E(\lambda,s)}(1+\lambda)^{-(p^*+1)}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s,$$

其中$E(\lambda,s)=\left\{(\lambda,s)\in[0,+\infty)^2: 0<|cs-\lambda|\le\frac{\delta}{2}, ct-r\le cs+\lambda\le ct+r\right\}$.

通过变换如下积分坐标

$$\alpha=cs+\lambda, \beta=\frac{cs-\lambda}{c}, \tag{5.5}$$

可以得到

$$u(x,t)\ge \frac{C\varepsilon^p}{r^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\frac{\delta}{2c}}\mathrm{d}\beta\int_{ct-r}^{ct+r}(1+\alpha)^{-(p^*+1)}\mathrm{d}\alpha\ge \frac{C\varepsilon^p}{r^{\frac{1}{2}}}\int_{ct-r}^{ct+r}(1+\alpha)^{-(p^*+1)}\mathrm{d}\alpha.$$

接下来, 我们对p^*行分类讨论

1)当$p^*\ge 1$时, 由于$1-m^n\ge\min\{n,1\}(1-s)$, 那么

$$\int_{ct-r}^{ct+r}(1+\alpha)^{-(p^*+1)}\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{p^*(1+ct-r)^{p*}}\left[1-\left(\frac{1+ct-r}{1+ct+r}\right)^{p*}\right]\ge\frac{2r}{p*}\Lambda_{(1,p*)}(r,ct);$$

2)当$p^*<1$时,

$$\int_{ct-r}^{ct+r}(1+\alpha)^{-(p^*+1)}\mathrm{d}\alpha\ge\frac{1}{(1+ct-r)^{p^*-1}}\int_{ct-r}^{ct+r}(1+\alpha)^{-2}\mathrm{d}\alpha=2r\Lambda_{(1,p*)}(r,ct).$$

综上, 可知$\int_{ct-r}^{ct+r}(1+\alpha)^{-(p*+1)}\mathrm{d}\alpha\ge Cr\Lambda_{(1,p*)}(r,ct)$, 于是得到(5.4).

定义$T(p*,r,t)=\inf\left\{r^{-\frac{1}{2}}\Lambda_{(-1,-p*)}(r,t)|u(x,t)|\right\}$, 假设$0<\delta\le 1$, 由(5.4)易知

$$T(p*,r,t)\ge C_1\varepsilon^p. \tag{5.6}$$

命题5.2　令$b=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}$, 存在一正常数$C$, 使得

$$T(p*,r,t)\ge C\int_1^{yk}\left(1-\frac{\beta}{yk}\right)^b\frac{[T(p*,\alpha,\beta)]^p}{(1+\beta)^{pp*}}\mathrm{d}\beta. \tag{5.7}$$

证　根据(2.10)和(5.2)可知

$$u(x,t)\ge L\{\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\}\ge\frac{C}{r^{\frac{1}{2}}}\iint_{D(r,t)}\frac{\lambda^b|T(p*,\lambda,s|^p\Lambda_{(p,pp*)}(\lambda,cs)}{(1+\lambda^2)^{\frac{m}{2}}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s.$$

假设$\frac{ct-r}{c}>1$, 通过坐标转换公式(5.5), 得到

$$\begin{aligned}u(x,t)&\ge\frac{C}{r^{\frac{1}{2}}}\int_1^{\frac{ct-r}{c}}\mathrm{d}\beta\int_{ct-r}^{ct+r}\frac{(\alpha-c\beta)^b|T(p*,\alpha,\beta)|^p}{(1+\alpha)^{p+m}(1+\beta)^{pp*}}\mathrm{d}\alpha\\&\ge\frac{C}{r^{\frac{1}{2}}}\int_{ct-r}^{ct+r}\frac{1}{(1+\alpha)^{p+m}}\mathrm{d}\alpha\int_1^{\frac{ct-r}{c}}\frac{(ct-r-c\beta)^b|T(p*,\alpha,\beta)|^p}{(1+\beta)^{pp*}}\mathrm{d}\beta.\end{aligned}$$

由于

$$\int_{ct-r}^{ct+r}\frac{1}{(1+\alpha)^{p+m}}\mathrm{d}\alpha\ge Cr\Lambda_{(1,p+m-1)}(r,ct),$$

那么可知

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &\geq Cr^{\frac{1}{2}}\varLambda_{(1,p+m-1)}(r,ct)\int_1^{\frac{ct-r}{c}}\frac{(ct-r-c\beta)^b|T\,(p*,\alpha,\beta)|^p}{(1+\beta)^{pp*}}\mathrm{d}\beta \\
&\geq Cr^{\frac{1}{2}}(ct-r)^b\varLambda_{(1,p+m-1)}(r,ct)\int_1^{\frac{ct-r}{c}}\left(1-\frac{c\beta}{ct-r}\right)^b\frac{|T\,(p*,\alpha,\beta)|^p}{(1+\beta)^{pp*}}\mathrm{d}\beta.
\end{aligned}
$$

由于$\frac{ct-r}{c}\geq 1$, 那么显然有$ct-r\geq\frac{c}{1+c}(1+ct-r)$, 于是

$$
u(x,t)\geq Cr^{\frac{1}{2}}\varLambda_{(1,p*)}(r,ct)\int_1^{\frac{ct-r}{c}}\left(1-\frac{c\beta}{ct-r}\right)^b\frac{|T\,(p*,\alpha,\beta)|^p}{(1+\beta)^{pp*}}\mathrm{d}\beta.
$$

由于$\int_1^{\frac{ct-r}{c}}\left(1-\frac{c\beta}{ct-r}\right)^b\frac{|T(p*,\alpha,\beta)|^p}{(1+\beta)^{pp*}}\mathrm{d}\beta$关于$(r,t)$是有界的, 整理上式我们得到(5.7).

接下来, 当$1<p\leq p_m^*(2)$时, 满足$pp*\leq 1$, 根据引理 2.5, 可知: 当$pp*\leq 1$时, $T(p*,r,t)$在有限的时间$T_*(\varepsilon)$ 内爆破. 而满足条件(1.10)的方程经典解(2.1)在T_m^*处爆破, 由于$T_m^*\leq T_*(\varepsilon)$, 由引理2.5, 最终得到定理1.2.

对于定理1.2中(1.14)的情形而言, 类似的需要首先建立方程齐次项的估计, 然后建立方程非齐次项的估计, 方便运算起见, 假设$c=1$.

对于齐次波动方程(2.2)的解(2.3)而言, 在满足假设条件(1.13)的基础上有

$$
|u_0(x,t)|\leq C\varLambda_{(\frac{1}{2},v)}(r,t). \tag{5.8}
$$

为此需要分别对$\partial_t J[f(x,t)]$和$J[g(x,t)]$建立估计, 于是有

$$
\begin{aligned}
|J[g(x,t)]|\leq& C\left\|(1+r)^{v+\frac{3}{2}}g(x,t)\right\|_{L^\infty(R^2)}\Big\{\int_{|r-t|}^{r+t}\lambda(1+\lambda)^{-v-\frac{3}{2}}[(\lambda+r)^2-t^2]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda \\
&+\int_0^{[t-r]_+}\lambda(1+\lambda)^{-v-\frac{3}{2}}[t^2-(\lambda+r)^2]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda\Big\}.
\end{aligned}
$$

由于$\lambda(\lambda+r+t)^{-1}\leq(1+\lambda)(1+r+t)^{-1}$, 那么

$$
\begin{aligned}
|J[g(x,t)]|\leq& C(1+t+r)^{-\frac{1}{2}}\left\|(1+r)^{v+\frac{3}{2}}g(x,t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\
&\times\Big\{\int_{|r-t|}^{r+t}(1+\lambda)^{-v-\frac{1}{2}}[\lambda+r-t]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda+\int_0^{[t-r]_+}(1+\lambda)^{-v-\frac{1}{2}}[t-r-\lambda]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda\Big\}.
\end{aligned}
$$

当$0<v<\frac{1}{2}$时, 根据(2.13)可得

$$
|J[g(x,t)]|\leq C\varLambda_{(\frac{1}{2},v)}(r,t)\left\|(1+r)^{v+\frac{3}{2}}g(x,t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}. \tag{5.9}
$$

接下来, 对$\partial_t J[f(x,t)]$建立估计, 根据 (2.4) 有

$$
|\partial_t J[f(x,t)]|\leq Ct^{-1}|J[f(x,t)]|+C|J[\nabla f(x,t)]|. \tag{5.10}
$$

对于$|J[\nabla f(x,t)]|$的估计, 类似于$J[g(x,t)]$的情形, 即

$$
|J[\nabla f(x,t)]|\leq C\varLambda_{(\frac{1}{2},v)}(r,t)\left\|(1+r)^{v+\frac{3}{2}}\nabla f(x,t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}. \tag{5.11}
$$

对$t^{-1}|J[f(x,t)]|$的估计, 需要分三种情况进行讨论, 于是有$|J[f(x,t)]|\leq|(1+r)^{v+\frac{1}{2}}f(x,t)|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ (I_1+I_2), 其中

$$
I_1=\int_{|r-t|}^{r+t}\lambda(1+\lambda)^{-v-\frac{1}{2}}[(\lambda+r)^2-t^2]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda,\quad I_2=\int_0^{[t-r]_+}\lambda(1+\lambda)^{-v-\frac{1}{2}}[t^2-(\lambda+r)^2]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda.
$$

1) 当$t+r\geq 1, r\geq t$时, 此时$I_2=0$, 根据(2.12)得到

$$
I_1\leq\int_{|r-t|}^{r+t}(1+\lambda)^{-v-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda\leq C(1+t+r)^{\frac{1}{2}}\int_{|r-t|}^{r+t}(1+\lambda)^{-v-1}\mathrm{d}\lambda\leq Ct\varLambda_{(\frac{1}{2},v)}(r,t); \tag{5.12}
$$

2) 当$t+r\geq 1, r\leq t$时, 根据(2.13)(2.14) 得到

$$I_1+I_2\leq Ct(1+t+r)^{-\frac{1}{2}}\Big\{\int_{|r-t|}^{r+t}(1+\lambda)^{-v-\frac{1}{2}}(\lambda+r+t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda$$

$$+\int_0^{t-r}(1+\lambda)^{-v-\frac{1}{2}}[t-r-\lambda]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda\Big\}\leq Ct\Lambda_{(\frac{1}{2},v)}(r,t); \tag{5.13}$$

3) 当$t+r\leq 1, r\leq t$时, 显然有

$$I_1+I_2\leq Ct^{\frac{1}{2}}\Big\{\int_{t-r}^{r+t}(\lambda+r-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda+\int_0^{t-r}(t-r-\lambda)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda\Big\}\leq Ct. \tag{5.14}$$

由(5.12)(5.13)(5.14)得到$t^{-1}|J[f(x,t)]|$的估计, 最后将(5.9)(5.10)带入(2.3)得到(5.8).

接下来, 建立非齐次项的估计, 于是有

命题5.2　存在常数$\mu>0$,当$k>1$时, 有

$$L\Big\{\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\Big\}\leq C\sup\Big\{\Lambda_{(\frac{1}{2}-\mu,\mu-\frac{5}{2})}(r,t)\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\Big\}, \tag{5.15}$$

而当$k\leq 1$时, 可以得到

$$L\Big\{\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\Big\}\leq C\sup\Big\{\Lambda_{(\frac{1}{2}-\mu,-k+\mu-\frac{3}{2})}(r,t)\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\Big\}. \tag{5.16}$$

证　根据(2.11) 可以得到

$$L\Big\{\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\Big\}\leq (I_1+I_2)\sup\Big\{\Lambda_{(-\mu,-k)}(r,t)\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\Big\}, \tag{5.17}$$

这里

$$I_1=\iint_{D(r,t)}\Lambda_{(\mu-1,k)}(\lambda,s)(\lambda-s+t+r)^{-\frac{1}{2}}(\lambda+s+r-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s,$$

$$I_2=\iint_{D'(r,t)}\Lambda_{(\mu-1,k)}(\lambda,s)(\lambda-s+t+r)^{-\frac{1}{2}}(t-r-\lambda-s)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s.$$

取$\xi=\lambda+s,\eta=\lambda-s$,于是

$$\begin{aligned}I_1=&\int\int_{D(r,t)}\Lambda_{(\mu,k)}(\xi,\eta)(\xi+r-t)^{-\frac{1}{2}}(\eta+r+t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\=&\frac{1}{2}\int_{|t-r|}^{t+r}(1+\xi)^{-u+1}(\xi+r-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi\int_{-\alpha}^{t-r}(1+\eta)^{-k}(\eta+t+r)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\eta,\\I_2=&\int\int_{D'(r,t)}\Lambda_{(\mu-1,k)}(\xi,\eta)[t-r-\xi]^{-\frac{1}{2}}(\eta+r+t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\=&\frac{1}{2}\int_0^{[t-r]_+}(1+\xi)^{-u+1}(t-r-\xi)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi\int_{-\xi}^{\xi}(1+\eta)^{-k}(\eta+t+r)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

类似的，我们分两种情况进行讨论

1) 当$2r\geq t, t+r\geq 1$时, 无论$\eta>-\xi, 0<\xi<t-r$还是$\eta>r-t$, 我们都可以得到$\eta+t+r>2r$, 换言之, 存在一常数C, 满足$\eta+t+r\geq C(1+t+r)$, 进一步, 可得：

$$I_1+I_2\leq C(1+t+r)^{-\frac{1}{2}}\Big\{\int_{|t-r|}^{t+r}(1+\xi)^{-u+[1-k]_+}(\xi+r-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi$$

$$+\int_0^{[t-r]_+}(1+\xi)^{-u+[1-k]_+}(t-r-\xi)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi\Big\}.$$

根据式子(2.13)和(2.14), 得到当$k\leq 1$时,

$$I_1+I_2\leq C\Lambda_{(\frac{1}{2},\mu+k-\frac{5}{2})}(r,t). \tag{5.18}$$

当$k>1$时,

$$I_1+I_2\le C\Lambda_{(\frac{1}{2},\mu-\frac{3}{2})}(r,t). \tag{5.19}$$

2) 而当$2r\ge t,t+r\le 1$时I_1+I_2是有界的, 自然(5.15)(5.16)成立. $t\ge 2r$时, 根据式子(2.13)易知: 当$k>1$时, $I_1+I_2\le C\Lambda_{(\frac{1}{2},0)}(r,t)$, 而当$k\le 1$ 时, $I_1+I_2\le C\Lambda_{(k-\frac{1}{2},0)}(r,t)$. 特别地, 我们仅对第一种情形进行讨论, 显然: 当$k<1$时, 将(5.18)带入(5.17)中, 我们得到(5.15). 当$k>1$时, 将(5.19)带入(5.17)中, 我们得到(5.16).

命题5.3 在范数$\|\cdot\|_X=\sup\{\Lambda_{(-\frac{1}{2},-v)}(r,t)|\cdot|\}$ 的定义下,对于给定的常数$C_0=C_0(f,g)$和ε_0,当$0<\varepsilon\le\varepsilon_0$时, 有$\|u\|_X\le 2C_0\varepsilon$.

证 根据式子(5.8)易知

$$\| u_0(x,t) \|_X\le C_0\varepsilon. \tag{5.20}$$

当$k\le 1$时, 根据(5.16)可知

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{L}\left\{\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}\right\|_X \le& C\sup\left\{\Lambda_{(\frac{1}{2}-\mu,-k+\mu-\frac{3}{2})}(r,t)\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\Lambda_{(-\frac{1}{2},-v)}(r,t)\right\}\\ \le& \mathrm{C}\sup\left\{\Lambda_{(-\mu,-k+\mu-\frac{3}{2}-v+m)}(r,t)|u|^p\right\}.\end{aligned}$$

取$\mu=\frac{p}{2}$, 当k满足$k\le(p-1)v+(\frac{p}{2}-\frac{3}{2}+m)$时, 有

$$\left\|L\left\{\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}\right\|_X\le C\|u\|_X^p.$$

当$k>1$时, 根据(5.15)可知

$$\begin{aligned}\left\|L\Big\{\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\Big\}\right\|_X \le& C\sup\Big\{(1+t+r)^{\frac{1}{2}}(1+|t-r|)^v\Lambda_{(\frac{1}{2}-\mu,\mu-\frac{5}{2})}(r,t)\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\Big\}\\ \le& C\sup\Big\{\Lambda_{(-\mu,\mu-v-\frac{5}{2})}(r,t)\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\Big\}.\end{aligned}$$

事实上, 这里$v=\frac{p}{2}-\frac{3}{2},\mu=\frac{p}{2}$, 于是

$$\left\|L\left\{\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}\right\|_X\le C\sup\left\{\Lambda_{(-\frac{p}{2},-1)}(r,t)\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}.$$

由于$2r\ge t$, 则$r\ge|t-r|$,那么当$p>p_m^\circ(2)$时, 满足$(1+r)^m\ge(1+|t-r|)^{1-pv}$ 这里$p_m^\circ(2)$是一元二次方程$p^2-3p+2(m-1)=0$的正实根. 假定$\|u\|_X\le 2C_0\varepsilon$,存在一常数$\varepsilon_0$, 当$0<\varepsilon\le\varepsilon_0$时, 在满足条件$2^pCC_0^p\varepsilon^{p-1}\le C_0$, 有

$$\left\|L\left\{\frac{|u|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}\right\|_X\le C\,\|u\|_X^p\le C_0\varepsilon. \tag{5.21}$$

根据式子(5.20)和(5.21)可知假设成立. 接下来, 由于

$$\begin{aligned}\left\|L\left\{\frac{|u_1|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}-L\left\{\frac{|u_2|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}\right\|_X =&\left\|L\left\{\frac{|u_1|^p-|u_2|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}\right\|_X\\ \le& Cp\left\|\frac{|u_1|^{p-1}}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}+\frac{|u_2|^{p-1}}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\|\|u_1-u_2\|_X.\end{aligned}$$

当满足条件$2^ppCC_0^{p-1}\varepsilon^{p-1}\le\frac{1}{2}$, 可知

$$\left\|L\left\{\frac{|u_1|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}-L\left\{\frac{|u_2|^p}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}\right\|_X\le\frac{1}{2}\|u_1-u_2\|_X.$$

根据压缩映射原理, 我们得到方程(1.1)整体解的存在唯一性, 进而得到(1.14)的证明.

参考文献:

[1] ROBERT T G. Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations[J]. Math. Z., 1981, 177(3): 323-340.

[2] FRITZ John. Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions[J]. Manuscripta Math., 1979, 28(1): 235-265.

[3] THOMAS C S. Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions[J]. Comm. Partial Di. Equations., 1984, 52(3): 378-406.

[4] ROBERT T G. Existence in the large for $\Box u = F(u)$ in two dimensions[J]. Math. Z., 1981, 178(2): 233-261.

[5] YI Zhou. Cauchy problem for semilinear wave equations with small data in four space dimensions[J]. J. Di. Equations., 1995, 34(8): 135-144.

[6] HANS Lindblad, CHRISTOPHER D Sogge. Long-time existence for small amplitude semilinear wave equations[J]. Amer. J. Math., 1997, 118(5): 1047-1135.

[7] VLADIMIR Georgiev, HANS Lindblad, CHRISTOPHER D S. Weighted Strichartz estimate and global existence for semilinear wave equations[J]. American Journal of Mathematics., 1997, 119(6): 1291-1319.

[8] RENTARO Agemt, HIROYUKI Takamura. The life span of classical solutions to nonlinear wave equations in two space dimensions[J]. Hokkaido Mathematical Journal., 1992, 21(3): 517-542.

[9] YI Zhou. Life span of classical to $\Box u = |u|^p$ in two space dimension[J]. Chin. Ann. Math., Ser. B, 1993, 14(2): 225-236.

[10] MICHAEL R, BERT W S. Trend in the Theory of Hyperbolic Equations[M]. Berlin: Die Deutsche Bibliothek, 2005.

[11] YI Zhou. Life span of classical solution to $u_{tt} - u_{xx} = |u|^{1+a}$[J]. Chin. Ann. Math., Ser. B, 1992, 13(2): 230-243.

[12] HIDEO Kubo, AYAKO Osaka, MUHAMMET Yazici. Global existence and blow-up for wave equations with weighted nonlinear terms in one space dimension[J]. Interdisciplinary Information Sciences, 2013, 19(2): 143-148.

[13] WAKASA K. The life span of solutions to wave equations with weighted nonlinear terms in one space dimension[J]. Analysis of PDEs, 2014: arXiv:1409.5877v1.

[14] MARIAGRAZIA D F. Lower bounds of the life span of classical solutions to a system of semilinear wave equations in two space dimension[J]. Journal of Mathmatical Analysis and Applications., 2003, 281(1): 22-45.

[15] KYOUHEI Wakasa. The lifespan of solutions to semilinear damped wave equations in one space dimension[J]. Communications on Pure Applied Analysis, 2017, 15(4): 1265-1283.

The Life Span of Classical Solutions to Nonlinear Wave Equations with Weighted Function in Two Space Dimensions

WANG Husheng, SUN Haixia

(*School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China*)

Abstract: The paper concerns the cauchy problem for the nonlinear wave equation with weighted function. Under the assumption of the small initial data, the life span of the classical solution is studied. Also, the paper figures out the upper and lower bound estimation of the life span and develops the known results.

Key words: Wave equation; Classical solution; Blow up; The life span