应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2020, 33(3): 718-727

次线性期望下独立同分布序列的一般强收敛性

陈滨霞, 吴群英
(桂林理工大学理学院, 广西 桂林 541004)

摘要：在Choquet积分存在条件下, 研究并建立次线性期望空间中的独立同分布随机变量序列的一般强收敛性定理, 从而将传统概率空间的一般强收敛定理推广到次线性期望空间中. 我们的结果推广了MENG(2019)的相应结果, 得到两个一般的强大数定律(SLLN), 其中加权和的系数是一般函数, 作为推论, 我们得到独立同分布随机变量序列的Marcinkiewicz型SLLN、对数SLLN和Marcinkiewicz SLLN.

关键词：次线性期望; 强大数定律; 独立同分布
中图分类号：O211.4　　　　**AMS(2000)主题分类**：60F15
文献标识码：A　　　　**文章编号**：1001-9847(2020)03-0718-10

1. 引言与预备知识

极限定理是概率论和统计学的重要研究课题, 但随着极限理论在统计、金融风险度量等领域的应用更加广泛和深入, 只能用于确定性模型的经典极限理论逐渐显现其局限性, 因为在实际应用中, 不确定性现象往往不能用确定性模型来建模解释. 因此, PENG[1−3]在实践建模不确定性的激励下, 引入了次线性期望的概念, 将传统的概率和期望转化为容度和次线性期望. 目前, 次线性期望下的极限理论得到了越来越多的关注和研究, 例如: ZHANG[4−6]深入研究了次线性期望空间, 建立了指数不等式、Rosenthal不等式、强大数定律(SLLN)等一系列重要的不等式, WU和JIANG[7]也对次线性期望下的SLLN进行了系统性的研究.

在经典的概率空间背景下, Marcinkiewicz SLLN 结果为：对于独立同分布的随机变量序列, 任意$p \in (0,2)$, 存在着有限常数a, 使$n^{-1/p}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a) \to 0$ a.s. $\Leftrightarrow \mathrm{E}|X_1|^p < \infty$, 当$1 \le p < 2$时, $a = \mathrm{E}X_1$; 当$0 < p < 1$时, a可取任意值(常取$a = 0$), 而Kolmogorov SLLN是Marcinkiewicz SLLN当$p = 1$时的特殊情况. 目前, 次线性期望空间下的SLLN研究也取得了许多成果, CHEN[8]研究了次线性期望下独立同分布随机变量序列的SLLN, 将经典的Kolmogorov SLLN进行了推广, PENG[9]、HU[10]、ZHANG[4]得到了不同条件下的Kolmogorov SLLN; 林敬航[11]在p阶Choquet积分存在条件下得到独立同分布序列的Marcinkiewicz SLLN. 综合上述文献发现, 在独立同分布随机变量序列的SLLN研究中, 加权和的系数是一般函数的情况鲜少有学者讨论. 因此, 本文扩展了MENG[12]得到的相应结果,

---

* 收稿日期：2019-08-11
基金项目：国家自然科学基金 (11661029), 广西自然科学基金联合培育项目 (2018GXNSFAA294131), 广西自然科学基金 (2018GXNSFAA281011), 2020广西硕士研究生创新项目 (YCSW2020175)
作者简介：陈滨霞, 女, 汉族, 广西人, 研究方向: 概率极限理论.
通讯作者：吴群英.

在Choquet积分存在条件下得到了两个一般的SLLN, 其中加权和的系数是一般函数. 作为推论, 我们得到了独立同分布随机变量的Marcinkiewicz型SLLN、对数SLLN和Marcinkiewicz SLLN.

本文利用PENG[1−3]所构建的次线性期望基本概念和框架, 即假设$(\Omega,\mathcal{F})$是给定的可测度空间, $\mathcal{H}$是定义在$(\Omega,\mathcal{F})$上由实函数所构成的线性空间, 如果$X_1,\cdots,X_n\in\mathcal{H}$, 则对$\forall\varphi\in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$, 有$\varphi(X_1,\cdots,X_n)\in\mathcal{H}$, 其中$C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$表示局部Lipschitz 函数的线性空间, 即$\varphi$满足：

$$|\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{y})|\leq c\,(1+|\mathbf{x}|^m+|\mathbf{y}|^m)\,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|,\quad \forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n,$$

其中, $c>0$且为常数, $m\in\mathbb{N}$的选取取决于φ, $\mathcal{H}$ 是由随机变量构成的线性空间, 记$X\in\mathcal{H}$.

定义1[2]　次线性期望$\hat{E}:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$, $\hat{E}$满足下列四个条件:

1) 单调性: 如果$X\geq Y$, 则$\hat{E}(X)\geq\hat{E}(Y)$;

2) 保持常数不变: $\hat{E}(c)=c$;

3) 次可加性: $\hat{E}(X+Y)\leq\hat{E}(X)+\hat{E}(Y)$;

4) 正齐性: 对任意$\lambda>0$, 都有$\hat{E}(\lambda X)=\lambda\hat{E}(X)$.

三元组$(\Omega,\mathcal{H},\hat{E})$称为次线性期望空间, $\hat{E}$是次线性期望, 定义$\hat{E}$的共轭期望$\hat{\varepsilon}$为:

$$\hat{\varepsilon}(X):=-\hat{E}(-X),\forall X\in\mathcal{H}.$$

从定义得出, 对于所有的$X,Y\in\mathcal{H}$, 则有:

$$\hat{\varepsilon}(X)\leq\hat{E}(X),\hat{E}(X+c)=\hat{E}(X)+c,|\hat{E}(X-Y)|\leq\hat{E}|X-Y|,\hat{E}(X-Y)\geq\hat{E}(X)-\hat{E}(Y).$$

如果$\hat{E}(Y)=\hat{\varepsilon}(Y)$, 对于$\forall a\in\mathbb{R}$, 则有:

$$\hat{E}(X+aY)=\hat{E}(X)+a\hat{E}(Y).$$

定义2[2]　令$\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$, 一个函数$V:\mathcal{G}\to[0,1]$称为容度, 如果下式成立:

1) $V(\varnothing)=0,\ V(\Omega)=1$;

2) $V(A)\leq V(B),\ \forall A\subseteq B,\ \ A,B\in\mathcal{G}$.

如果对于所有的$A,B\in\mathcal{G}$, 有$V(A\cup B)\leq V(A)+V(B)$, 则称V具有次可加性.

在次线性期望空间可产生上容度$(\mathbb{V})$和下容度(v), 定义为:

$$\mathbb{V}(A):=\inf\{\hat{E}\xi;I(A)\leq\xi,\xi\in\mathcal{H}\},\quad v(A):=1-\mathbb{V}(A^c),\forall A\in\mathcal{F},$$

其中$I(\bullet)$为示性函数, A^c是A的补集, 根据定义, 则有:

$$v(A)\leq\mathbb{V}(A),\ \forall A\in\mathcal{F},$$

如果有$I(A)\in\mathcal{H}$, 则有:

$$\mathbb{V}(A)=\hat{E}(I(A)),\ v(A)=\hat{\varepsilon}(I(A)).$$

定义3[2] 定义Choquet 积分为:

$$C_V(X):=\int_0^\infty V(X>x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^0(V(X>x)-1)\mathrm{d}x,$$

其中容度V可被上容度$\mathbb{V}$和下容度v替代.

定义4[2]　1) $\hat{E}$的可数次可加性: 如果$X\leq\sum_{n=1}^\infty X_n$, 其中$X,X_n\in\mathcal{H},\ X\geq0,\ X_n\geq0,\ n\geq1$, 有$\hat{E}(X)\leq\sum_{n=1}^\infty\hat{E}(X_n)$成立, 则称$\hat{E}$具有可数次可加性.

2) 如果容度V满足:

$$V\left\{\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right\}\leq\sum_{n=1}^\infty V(A_n),\quad\forall A_n\in\mathcal{F},$$

则称V具有可数次可加性.

定义5[2] 1) 同分布: 假设$\mathbf{X}_1$和$\mathbf{X}_2$为两个n维随机向量, 分别定义在次线性空间$(\Omega_1,\mathcal{H}_1,\hat{E}_1)$和$(\Omega_2,\mathcal{H}_2,\hat{E}_2)$中, 如果满足:

$$\hat{E}_1\left[\varphi\left(\mathbf{X}_1\right)\right]=\hat{E}_2\left[\varphi\left(\mathbf{X}_2\right)\right],\quad \forall\varphi\in \mathrm{C}_{l,\mathrm{Lip}}\left(\mathbb{R}^n\right),$$

则称$\mathbf{X}_1$与$\mathbf{X}_2$同分布, 并记为$\mathbf{X}_1\overset{d}{=}\mathbf{X}_2$.

2) 独立性: 在次线性期望空间$(\Omega,\mathcal{H},\hat{E})$中, 对于每一个$\varphi\in C_{l,\mathrm{Lip}}\left(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\right)$, 若$\mathbf{Y}=\left(Y_1,\cdots,Y_n\right), Y_i\in\mathcal{H}$和$\mathbf{X}=\left(X_1,\cdots,X_m\right), X_i\in\mathcal{H}$满足$\hat{E}(\varphi(\mathbf{X},\mathbf{Y}))=\hat{E}(\hat{E}(\varphi(\mathbf{x},\mathbf{Y}))|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}})$, 其中, 对于所有的$\mathbf{x}$, 有$\bar{\varphi}(\mathbf{x}):=\hat{E}[|\varphi(\mathbf{x},\mathbf{Y})|]<\infty$, 并且$\hat{E}[|\bar{\varphi}(\mathbf{X})|]<\infty$.

在本文后面, $\{X_n;n\geq 1\}$均表示在$(\Omega,\mathcal{H},\hat{E})$的独立同分布随机变量序列; 符号"$c$"表示与$n$无关的常数, 在不同地方可取不同的值; 符号"$\sim$"表示等价; "$a_n\ll b_n$"表示存在一个常数$c>0$, 使得对于足够大的$n$, 都有$a_n\leq cb_n$成立.

2. 主要结果

假设A 令$f(x),g(x)$是定义在相同定义域$[h,+\infty)$的正实函数, $\varphi(x)=f(x)g(x)$, $1\leq h\leq 2$, 满足下列条件:

(i) $f(x)$在定义域单调递增, 并且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$;

(ii) $\varphi(x)$在$[h,+\infty)$上严格单调递增, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$;

(iii) 令$\varphi^{-1}(x)$表示$\varphi(x)$的反函数, 并且设$\varphi^{-1}(x)$的导数存在, 存在常数$a,b\in\mathbb{R}$, 使得对每一个$t\in\mathbb{R}$, 都有

$$|t|\int_{\varphi^{-1}(|t|)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\varphi^2(x)}\leq a\left[\varphi^{-1}(|t|)\right]'+b. \tag{2.1}$$

令$\tilde{X}_n=-\varphi(n)I_{(X_n<-\varphi(n))}+X_nI_{(|X_n|\leq\varphi(n))}+\varphi(n)I_{(X_n>\varphi(n))}$.

定理1 $f(x),g(x),\varphi(x)$是满足假设A的函数, $\mathbb{V}$是可数次可加的, $\hat{E}(\tilde{X}_n)=\hat{\varepsilon}(\tilde{X}_n)$,

$$U_n=\frac{1}{f(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k-\hat{E}(\tilde{X}_k)}{g(k)}. \tag{2.2}$$

若

$$C_{\mathbb{V}}\left(\varphi^{-1}\left(|X_1|\right)\right)<\infty, \tag{2.3}$$

则$U_n\to 0$ a.s. $\mathbb{V}, n\to\infty$.

推论1 假设$f(x)=x^{1/p}(0<p<2)$, $g(x)=1$, 则$\varphi(x)=x^{1/p}, x\in[1,+\infty)$, $\mathbb{V}$是可数次可加的, $\hat{E}(\tilde{X}_n)=\hat{\varepsilon}(\tilde{X}_n)$, 若式(2.3)成立, 那么

$$n^{-1/p}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\hat{E}(\tilde{X}_k))\to 0 \text{ a.s. } \mathbb{V}, n\to\infty. \tag{2.4}$$

推论2 假设$f(x)=\log x$, $g(x)=x^\alpha\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$, 则$\varphi(x)=x^\alpha\log x, x\in[2,+\infty)$, $\mathbb{V}$是可数次可加的, $\hat{E}(\tilde{X}_n)=\hat{\varepsilon}(\tilde{X}_n)$, 若式(2.3)成立, 那么

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(X_k-\hat{E}(\tilde{X}_k))}{k^\alpha}\to 0 \text{ a.s. } \mathbb{V}, n\to\infty. \tag{2.5}$$

定理2 令$f(x),g(x),\varphi(x)=f(x)g(x)$是满足假设A的函数, $\mathbb{V}$是可数次可加的, $\varphi(x)$满足:

(i) 如果$\int_r^\infty\frac{\mathrm{d}x}{\varphi(x)}$有限, 那么$\int_r^\infty\frac{\mathrm{d}x}{\varphi(x)}\leq\frac{cr}{\varphi(r)}(r\geq 1)$;

(ii) 如果$\int_r^\infty\frac{\mathrm{d}x}{\varphi(x)}$不存在或发散, $\frac{x}{\varphi(x)}$是非减的, 则有$\int_1^t\frac{\mathrm{d}x}{\varphi(x)}\leq\frac{ct}{\varphi(t)}(r\geq 1, t\geq 1)$, 并且$\hat{E}X_1=\hat{\varepsilon}X_1=0$, $\hat{E}$是可数次可加的.

设

$$\hat{U}_n=\frac{1}{f(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{g(k)}, \tag{2.6}$$

若式(2.3)成立, 则$\hat{U}_n \to 0$ a.s. $\mathbb{V}, n \to \infty$.

通过定理2, 我们可以获得独立同分布随机变量序列的Marcinkiewicz SLLN.

推论3　假设$\mathbb{V}$是可数次可加的, $p \in (0,2)$, 当$1 \le p < 2$时, 进一步假设$\hat{E}X_1 = \hat{\varepsilon}X_1$, 且$\hat{E}$具有可数次可加性. 若$C_{\mathbb{V}}\left(|X_1|^p\right) < \infty$, 则有:

$$n^{-1/p} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - a\right) \to 0 \text{ a.s. } \mathbb{V}, n \to \infty, \tag{2.7}$$

其中若$0 < p < 1$, 则a为任意实数, 若$1 \le p < 2$, 则$a = \hat{E}X_1$.

注　定理1和定理2将MENG[12]在概率空间中的结果推广到了次线性期望空间中, 作为推论, 我们将概率空间中传统的SLLN也推广到了次线性期望空间中, 得到了独立同分布随机变量序列的Marcinkiewicz型SLLN、对数SLLN和Marcinkiewicz SLLN. 另一方面, 本文拓展了XU和ZHANG[13]、ZHANG和LIN[14] 在次线性期望空间中的研究结果, 得到了两个一般的SLLN, 其中加权和的系数是一般函数.

3. 主要结果的证明

引理1(Borel-Cantelli's引理)[6]　令$\{A_n; n \ge 1\}$是$\mathcal{F}$中的事件列, V是可数次可加的, 若$\sum_{n=1}^{\infty} V\left(A_n\right) < \infty$, 则

$$V\left(A_n \text{ i.o. }\right) = 0, \quad \text{其中} \quad \left\{A_n \text{ i.o. }\right\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i.$$

由于$\hat{E}$只对$X \in \mathcal{H}$有定义, 因此可在随机变量空间中定义一个扩展的E^*: $E^*(X) = \inf\{\hat{E}[Y] : X \le Y, Y \in \mathcal{H}\}$, 使得$E^*$对所有$X$都有定义.

引理2[6]　E^*是随机变量空间的次线性期望, 并且有如下性质:

$$E^*[X] = \hat{E}[X], \quad \forall X \in \mathcal{H}, \quad \mathbb{V}(A) = E^*\left[I_A\right], \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

引理3[13]　假设$\{X_n; n \ge 1\}$在$(\Omega, \mathcal{H}, \hat{E})$是独立同分布随机变量序列, V是可数次可加的, 并且$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{E}\left(X_n\right)$和$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varepsilon}\left(X_n\right)$都是收敛的, 存在$1 \le p \le 2$, 如果$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{E}\left(|X_n|^p\right) < \infty$, 则有$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$几乎处处上容度收敛.

引理4　设$X_1 \in \mathcal{H}, c > 0$且为常数, 由式(2.3)可推导出:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi^{-1}(n)\right]' \mathbb{V}\left(|X_1| > cn\right) < \infty; \tag{3.1}$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}\left(|X_1| > c\varphi(n)\right) < \infty. \tag{3.2}$$

证　因为

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{V}}\left(\varphi^{-1}\left(|X_1|\right)\right) &\sim c \int_0^{\infty} \mathbb{V}\left(|X_1| > c\varphi(t)\right) \mathrm{d}t \qquad \text{令} y = \varphi(t) \\ &= \int_0^{\infty} \left[\varphi^{-1}(y)\right]' \mathbb{V}\left(|X_1| > cy\right) \mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{3.3}$$

因此, 由$C_{\mathbb{V}}\left(\varphi^{-1}\left(|X_1|\right)\right) < \infty$可得$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}\left(|X_1| > c\varphi(n)\right) < \infty$和$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi^{-1}(n)\right]' \mathbb{V}\left(|X_1| > cn\right) < \infty$.

定理1的证明　取$0 < u < 1$, 设偶函数$g(x) \in C_{l,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R})$, 满足对所有$x$均有$0 \le g(x) \le 1$, 当$|x| \le u$时, $g(x) = 1$; 当$|x| > 1$时, $g(x) = 0$, 有:

$$I(|x| \le u) \le g(x) \le I(|x| \le 1), \; I(|x| > 1) \le 1 - g(x) \le I(|x| > u). \tag{3.4}$$

由式(2.3)和式(3.2)可知：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\left(|X_n|\geq\varphi(n)\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\hat{E}\left(1-g\left(\frac{X_n}{\varphi(n)}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{E}\left(1-g\left(\frac{X_1}{\varphi(n)}\right)\right)$$
$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\left(|X_1|>u\varphi(n)\right)<\infty. \tag{3.5}$$

由$\tilde{X}_n=-\varphi(n)I_{(X_n<-\varphi(n))}+X_nI_{(|X_n|\leq\varphi(n))}+\varphi(n)I_{(X_n>\varphi(n))}$得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}(X_n\neq\tilde{X}_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\left(|X_n|>\varphi(n)\right)<\infty, \tag{3.6}$$

由于$\mathbb{V}$是可数次可加的, 根据引理1得:

$$\mathbb{V}(X_n\neq\tilde{X}_n,\ \text{i.o.}\ )=0. \tag{3.7}$$

因此, 当$n\to\infty$时, 要证明$U_n\to 0$ a.s. $\mathbb{V}$, 只需证明:

$$\frac{1}{f(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\tilde{X}_k-\hat{E}\tilde{X}_k}{g(k)}\to 0\ \text{a.s.}\ \mathbb{V},\quad n\to\infty. \tag{3.8}$$

由假设A的$0<f(n)\uparrow+\infty$和Kronecker引理, 只要证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{X}_n-\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}$几乎处处上容度收敛即可. 对$\left\{\frac{\tilde{X}_n-\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}\right\}$应用引理3, 先证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{E}\left(|\tilde{X}_n-\hat{E}\tilde{X}_n|^2\right)}{\varphi^2(n)}<\infty$, 由于$\hat{E}(|\tilde{X}_n-\hat{E}\tilde{X}_n|^2)\leq 4\hat{E}|\tilde{X}_n|^2$, 因此, 只需证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{E}\left(|\tilde{X}_n|^2\right)}{\varphi^2(n)}<\infty$即可. 由

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{X}_1\right|^2&=\sum_{i=1}^{\varphi(n)}|X_1|^2I_{(i-1<|X_1|\leq i)}+\varphi^2(n)I_{(|X_1|>\varphi(n))}\\
&\leq\sum_{i=1}^{\varphi(n)}i^2I_{(i-1<|X_1|\leq i)}+\varphi^2(n)I_{(|X_1|>\varphi(n))}\\
&=\sum_{i=0}^{\varphi(n)-1}(i+1)^2I_{(|X_1|>i)}-\sum_{i=1}^{\varphi(n)}i^2I_{(|X_1|>i)}+\varphi^2(n)I_{(|X_1|>\varphi(n))}\\
&=\sum_{i=0}^{\varphi(n)-1}(i+1)^2I_{(|X_1|>i)}-\sum_{i=1}^{\varphi(n)-1}i^2I_{(|X_1|>i)}-\varphi^2(n)I_{(|X_1|>\varphi(n))}+\varphi^2(n)I_{(|X_1|>\varphi(n))}\\
&=1+\sum_{i=1}^{\varphi(n)-1}\left((i+1)^2-i^2\right)I_{(|X_1|>i)}\\
&\leq 1+3\sum_{i=1}^{\varphi(n)-1}iI_{(|X_1|>i)}\ll\sum_{i=1}^{\varphi(n)}iI_{(|X_1|>i)}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

因为$\left|\tilde{X}_1\right|^2\in\mathcal{H}$, 根据引理2, 有$\hat{E}\left(\left|\tilde{X}_1\right|\right)^2=E^*\left(\left|\tilde{X}_1\right|\right)^2\ll\sum_{i=1}^{\varphi(n)}i\mathbb{V}\left(|X_1|>i\right)$, 再由假设A的(iii)和式(3.1)得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{E}\left(\left|\tilde{X}_1\right|\right)^2}{\varphi^2(n)}\ll\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=1}^{\varphi(n)}i\mathbb{V}\left(|X_1|>i\right)}{\varphi^2(n)}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=\varphi^{-1}(i)}^{\infty}\frac{1}{\varphi^2(n)}i\mathbb{V}\left(|X_1|>i\right)$$
$$\ll\sum_{i=1}^{\infty}i\mathbb{V}\left(|X_1|>i\right)\int_{\varphi^{-1}(i)}^{\infty}\frac{1}{\varphi^2(x)}\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbb{V}(|X_1|>i)\frac{[\varphi^{-1}(i)]'}{i}\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\varphi^{-1}(i)\right]'\mathbb{V}\left(|X_1|>i\right)<\infty. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

接下来证明$\sum_{n=1}^{\infty}\hat{E}\left(\frac{\tilde{X}_n-\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}\right)$ 和$\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\varepsilon}\left(\frac{\tilde{X}_n-\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}\right)$的收敛性, 由$\hat{E}\left(\tilde{X}_n\right)=\hat{\varepsilon}\left(\tilde{X}_n\right)$可知:

$$
\hat{E}\left(\frac{\tilde{X}_n-\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}\right)=\hat{\varepsilon}\left(\frac{\tilde{X}_n-\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}\right)=0. \qquad (3.11)
$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}\hat{E}\left(\frac{\tilde{X}_n-\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}\right)$和$\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\varepsilon}\left(\frac{\tilde{X}_n-\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}\right)$均收敛. 综上所述, 由于$\mathbb{V}$是可数次可加的, 根据引理3得到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{X}_n-\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}$几乎处处上容度收敛, 再根据$0<f(n)\uparrow+\infty$和Kronecker引理, 可知定理1成立.

推论1的证明　显然, $f(x),\varphi(x)$满足假设A的条件(i)和(ii), 对于$r\in[1,+\infty)$,

$$
\begin{aligned}
\varphi(r)\int_r^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\varphi^2(x)}&=r^{1/p}\int_r^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2/p}}=r^{1/p}\left(\frac{p}{p-2}x^{1-2/p}\Big|_r^{+\infty}\right)\\
&=r^{1/p}\frac{p}{2-p}r^{1-2/p}=\frac{p}{2-p}r^{1-1/p}. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

令$r=\varphi^{-1}(|t|)$, 由于$\varphi(t)=t^{1/p}$得$\varphi^{-1}(t)=t^p$, 因此$[\varphi^{-1}(t)]'=pt^{p-1}$, 则式(3.12)可以写成$|t|\int_{\varphi^{-1}(|t|)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\varphi^2(x)}\le\frac{1}{2-p}\left[\varphi^{-1}(|t|)\right]'$, 故$\varphi(x)$也满足假设A的条件(iii), 因此满足定理1的所有条件. 由定理1可知:

$$
n^{-1/p}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\hat{E}\left(\tilde{X}_k\right)\right)\to 0 \text{ a.s. } \mathbb{V}, n\to\infty. \qquad (3.13)
$$

推论1 证毕.

推论2的证明　显然, $f(x),\varphi(x)$满足假设A的条件(i)和(ii), 对于$r\in[2,+\infty)$,

$$
\begin{aligned}
\varphi(r)\int_r^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\varphi^2(x)}&=r^{\alpha}\log r\int_r^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2\alpha}\log^2 x}\le r^{\alpha}\log r\frac{1}{\log^2 r}\int_r^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2\alpha}}\\
&=\frac{r^{1-\alpha}}{(2\alpha-1)\log r}. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

令$r=\varphi^{-1}(|t|)$, 由$\varphi(t)=t^{\alpha}\log t$, $\varphi^{-1}(t)\sim\left(\frac{\alpha t}{\log t}\right)^{1/\alpha}$, $[\varphi^{-1}(t)]'\sim\frac{(\alpha t)^{-1+1/\alpha}(\log t-1)}{(\log t)^{1+1/\alpha}}\sim\frac{(\alpha t)^{-1+1/\alpha}}{(\log t)^{1/\alpha}}$, 则式(3.14)可以写成$|t|\int_{\varphi^{-1}(|t|)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\varphi^2(x)}\le\frac{1}{(2\alpha-1)}\left[\varphi^{-1}(|t|)\right]'$, 得到$\varphi(x)$也满足假设A的条件(iii), 因此满足定理1的所有条件. 由定理1可得:

$$
\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(X_k-\hat{E}\left(\tilde{X}_k\right)\right)}{k^{\alpha}}\to 0 \text{ a.s. } \mathbb{V}, n\to\infty. \qquad (3.15)
$$

推论2证毕.

定理2的证明　为了证明当$n\to\infty$时, $\hat{U}_n\to 0$ a.s. $\mathbb{V}$, 由$0<f(n)\uparrow+\infty$和Kronecker引理可知, 只要证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{\varphi(n)}$几乎处处上容度收敛即可. 由$\mathbb{V}$是可数次可加的和式(3.7)可知, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{\varphi(n)}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{X}_n}{\varphi(n)}$几乎处处上容度的收敛性一致, 由引理3可知, 只需证明:

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{E}\left(\left|\tilde{X}_n\right|^2\right)}{\varphi^2(n)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\varepsilon}\tilde{X}_n}{\varphi(n)},
$$

收敛即可. 根据式(3.9)-(3.10)可得到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{E}\left(\left|\tilde{X}_n\right|^2\right)}{\varphi^2(n)}$收敛, 接下来证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\varepsilon}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}$的收敛性.

由于

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi(n)\right)&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{2^{k-1}\le n<2^k}\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi(n)\right)\ge\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{2^{k-1}\le n<2^k}\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^k\right)\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^k-2^{k-1}\right)\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^k\right)\right)\\&=2^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}2^k\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^k\right)\right).\end{aligned}\tag{3.16}$$

因此, 由$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi(n)\right)<\infty$得到$\sum_{k=1}^{\infty}2^k\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^k\right)\right)<\infty$. 由引理2可知:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}\right|&\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{E}\left|\tilde{X}_n\right|}{\varphi(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E^*\left|\tilde{X}_n\right|}{\varphi(n)}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(n)}E^*\left(\varphi(n)I_{(|X_n|>\varphi(n))}+|X_n|\,I_{(|X_n|\le\varphi(n))}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E^*|X_1|\,I_{(|X_1|\le\varphi(n))}}{\varphi(n)}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi(n)\right).\end{aligned}\tag{3.17}$$

当定理2的(i)成立时, 根据式(3.16)和式(3.17)得到:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(n)}E^*|X_1|\,I_{(|X_1|\le\varphi(n))}&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{2^{k-1}\le n<2^k}\frac{1}{\varphi(n)}E^*|X_1|\,I_{(|X_1|\le\varphi(n))}\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{2^{k-1}\le n<2^k}\frac{1}{\varphi\left(2^{k-1}\right)}E^*|X_1|\,I_{(|X_1|\le\varphi(2^k))}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{\varphi\left(2^{k-1}\right)}E^*\left(\sum_{j=1}^{k}|X_1|\,I_{(\varphi(2^{j-1})<|X_1|\le\varphi(2^j))}\right)\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{\varphi\left(2^{k-1}\right)}\sum_{j=1}^{k}E^*|X_1|\,I_{(\varphi(2^{j-1})<|X_1|\le\varphi(2^j))}\\&\le\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{\varphi\left(2^{k-1}\right)}\varphi\left(2^j\right)\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^{j-1}\right)\right)\\&\ll\sum_{j=1}^{\infty}\int_j^{\infty}\frac{2^{u-1}\mathrm{d}u}{\varphi\left(2^{u-1}\right)}\varphi\left(2^j\right)\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^{j-1}\right)\right)\qquad\text{令}y=2^{u-1}\\&\le c\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^{j-1}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)}\varphi\left(2^j\right)\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^{j-1}\right)\right)\\&\le c\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{j-1}}{\varphi\left(2^{j-1}\right)}\varphi\left(2^j\right)\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^{j-1}\right)\right)\\&\ll\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{j-1}}{\varphi\left(2^j\right)}\varphi\left(2^j\right)\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^{j-1}\right)\right)\\&=\sum_{j=1}^{\infty}2^{j-1}\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^{j-1}\right)\right)<\infty.\end{aligned}\tag{3.18}$$

另外, 由式(3.2)可知$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\left(|X_1|\geq\varphi(n)\right)<\infty$, 因此得到$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}\right|<\infty$, 故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}$也收敛. 另一方面, 由$\hat{\varepsilon}\left|\tilde{X}_n\right|\leq\hat{E}\left|\tilde{X}_n\right|$得到$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\hat{\varepsilon}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}\right|<\infty$, 故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\varepsilon}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}$也收敛.

当(ii)成立时, 注意到$\hat{E}X_n=0$, 根据引理2和式(3.16)可知:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}\right|&=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\hat{E}X_n-\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\hat{E}X_n-\hat{E}\tilde{X}_n\right|}{\varphi(n)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|E^*X_n-E^*\tilde{X}_n\right|}{\varphi(n)}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E^*\left|X_n-\tilde{X}_n\right|}{\varphi(n)}\\&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(n)}E^*\left|X_n\right|I_{(|X_n|>\varphi(n))}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\left(|X_n|>\varphi(n)\right).\end{aligned}\tag{3.19}$$

由$\hat{E}$的可数次可加性和引理2可知$E^*\left(\sum_{n=1}^{\infty}X_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}E^*\left(X_n\right)$, 因此:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(n)}E^*\left|X_n\right|I_{(|X_n|>\varphi(n))}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(n)}E^*\left|X_1\right|I_{(|X_1|>\varphi(n))}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{2^k\leq n<2^{k+1}}\frac{1}{\varphi(n)}E^*\left|X_1\right|I_{(|X_1|>\varphi(n))}\\&\leq\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{2^k\leq n<2^{k+1}}\frac{1}{\varphi\left(2^k\right)}E^*\left|X_1\right|I_{(|X_1|>\varphi(2^k))}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{\varphi\left(2^k\right)}E^*\left(\sum_{j=k}^{\infty}\left|X_1\right|I_{(\varphi(2^j)<|X_1|\leq\varphi(2^{j+1}))}\right)\\&\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{\varphi\left(2^k\right)}\sum_{j=k}^{\infty}E^*\left|X_1\right|I_{(\varphi(2^j)<|X_1|\leq\varphi(2^{j+1}))}\\&\leq\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}\frac{2^k}{\varphi\left(2^k\right)}\varphi\left(2^{j+1}\right)\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^j\right)\right)\\&\ll\sum_{j=1}^{\infty}\int_1^j\frac{2^u\mathrm{d}u}{\varphi\left(2^u\right)}\varphi\left(2^{j+1}\right)\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^j\right)\right)\qquad\text{令}y=2^u\\&\leq c\sum_{j=1}^{\infty}\int_2^{2^j}\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)}\varphi\left(2^{j+1}\right)\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^j\right)\right)\\&\leq c\sum_{j=1}^{\infty}\int_1^{2^j}\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)}\varphi\left(2^{j+1}\right)\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^j\right)\right)\\&\leq c\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^j}{\varphi\left(2^j\right)}\varphi\left(2^{j+1}\right)\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^j\right)\right)\\&\ll\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^j}{\varphi\left(2^{j+1}\right)}\varphi\left(2^{j+1}\right)\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^j\right)\right)\\&=\sum_{j=1}^{\infty}2^j\mathbb{V}\left(|X_1|>\varphi\left(2^j\right)\right)<\infty.\end{aligned}\tag{3.20}$$

由式(3.2)可得$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\left(|X_1|\geq\varphi(n)\right)<\infty$, 因此$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}\right|<\infty$, 故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{E}\tilde{X}_n}{\varphi(n)}$收敛.

因为$\hat{E}\left(-X_n\right)=-\hat{\varepsilon}\left(X_n\right)=0$, 且$X_n,\tilde{X}_n\in\mathcal{H}$, 根据引理2, 则有:

$$\begin{aligned}\left|\hat{E}\left(-\tilde{X}_n\right)\right|&=\left|\hat{E}\left(-\tilde{X}_n\right)-\hat{E}\left(-X_n\right)\right|=\left|E^*\left(-\tilde{X}_n\right)-E^*\left(-X_n\right)\right|\\&\leq E^*\left|-\tilde{X}_n-\left(-X_n\right)\right|=E^*\left|X_n-\tilde{X}_n\right|.\end{aligned}\tag{3.21}$$

由$\hat{E}$的可数次可加性和引理2, 再由式(3.19)和式(3.20)的证明过程可得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{E}\left(-\tilde{X}_n\right)}{\varphi(n)}$收敛, 因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\hat{\varepsilon}\left(\tilde{X}_n\right)}{\varphi(n)}$收敛, 最终得到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\varepsilon}\left(\tilde{X}_n\right)}{\varphi(n)}$也收敛. 综上所述, 由引理3可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{\varphi(n)}$几乎处处上容度收敛, 由$0<f(n)\uparrow+\infty$和Kronecker引理, 得到$\hat{U}_n\to 0$ a.s. $\mathbb{V}, n\to\infty$, 定理2证毕.

推论3的证明 如果$0<p<1$, 对任意的实数a, 有

$$n^{-1/p}\sum_{k=1}^{n}a\to 0, n\to\infty.\tag{3.22}$$

为了证明:

$$n^{-1/p}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-a\right)\to 0 \text{ a.s. } \mathbb{V}, n\to\infty.\tag{3.23}$$

只要证明:

$$n^{-1/p}\sum_{k=1}^{n}X_k\to 0 \text{ a.s. } \mathbb{V}, n\to\infty.\tag{3.24}$$

若$1\leq p<2,\ a=\hat{E}X_1$, 不失一般性, 设$\hat{E}X_1=\hat{\varepsilon}X_1=0$, 只要证明:

$$n^{-1/p}\sum_{k=1}^{n}X_k\to 0 \text{ a.s. } \mathbb{V}, n\to\infty.$$

所以, 当$0<p<2$我们都只需要证明:

$$n^{-1/p}\sum_{k=1}^{n}X_k\to 0 \text{ a.s. } \mathbb{V}, n\to\infty.$$

设

$$\begin{aligned}&f(x)=x^{1/p}, && 0<p<2, p\neq 1, x\in(0,+\infty);\\&\mathrm{g}(x)=1, && x\in[0,+\infty);\\&\varphi(x)=f(x)g(x), && x\in[0,+\infty).\end{aligned}\tag{3.25}$$

容易证明当$0<p<2,\ p\neq 1,\ f(x),g(x),\ \varphi(x)$都满足定理2的条件, 因此:

$$n^{-1/p}\sum_{k=1}^{n}X_k\to 0 \text{ a.s. } \mathbb{V}, n\to\infty.$$

由于在$p=1$情况下, 用定理2的方法不能证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{E}\tilde{X}_n}{n}$的收敛性, 因此没有给出当$p=1$时Marcinkiewicz SLLN的证明. WU和JIANG[7]给出了在次线性期望空间中, 当$p=1$时独立同分布随机变量序列的Marcinkiewicz SLLN的证明, 值得注意的是, 其文章所设定“$\mathbb{V}$为连续次可加”的条件只用在推导当p阶上积分发散时的情形, 在推导当p阶上积分收敛的情形时仍用“$\mathbb{V}$为可数次可加”的条件. 因此与本文定理2所采用的条件是一致的, 故$p=1$时独立同分布随机变量序列的Marcinkiewicz SLLN也成立. 综上所述, 结合我们已经证明的$p\neq 1$时的Marcinkiewicz SLLN情况, 最终得到:

$$n^{-1/p}\sum_{k=1}^{n}X_k\to 0 \text{ a.s. } \mathbb{V}, n\to\infty. \quad p\in(0,2)\tag{3.26}$$

成立, 推论3证毕.

参考文献:

[1] PENG S G. G-expectation, G-Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type[M]//Stochastic Analysis and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007: 541-567

[2] PENG S G. Multi-dimensional G-Brownian motion and related stochastic calculus under G-expectation[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2008, 118(12): 2223-2253.

[3] PENG S G. Survey on normal distributions, central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sublinear expectations[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2009, 52(7): 1391-1411.

[4] ZHANG L X. Strong limit theorems for extended independent and extended negatively dependent random variables under non-linear expectations[EB/OL]. [2019-08-11]. http://arxiv.org/abs/math/0702358.

[5] ZHANG L X. Exponential inequalities under the sub-linear expectations with applications to laws of the iterated logarithm[J]. Science China Mathematics, 2016, 59 (12): 2503-2526.

[6] ZHANG L X. Rosenthal’s inequalities for independent and negatively dependent random variables under sub-linear expectations with applications[J]. Science China Mathematics, 2016, 59(4): 751-768.

[7] WU Q Y, JIANG Y Y. Strong law of large numbers and Chover's law of the iterated logarithm under sub-linear expectations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 460(1): 252-270.

[8] CHEN Z J. Strong laws of large numbers for sub-linear expectations[J]. Science China Mathematics, 2016, 59(5): 945-954.

[9] PENG S G. Law of large numbers and central limit theorem under nonlinear expectations[J]. arXiv preprint math/0702358 (2007).

[10] HU C. A strong law of large numbers for sub-linear expectation under a general moment condition[J]. Statistics & Probability Letters, 2016, 119: 248-258.

[11] 林敬航.非线性期望空间下的MARCINKIEWICZ强大数律[D]. 浙江：浙江大学, 2016.

[12] MENG Y J. General strong convergence for negatively associated random variables[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2019, 48(9): 2206-2217.

[13] XU J P, ZHANG L X. Three series theorem for independent random variables under sub-linear expectations with applications[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2019, 35(2): 172-184.

[14] ZHANG L X, LIN J H. Marcinkiewicz's strong law of large numbers for nonlinear expectations[J]. Statistics & Probability Letters, 2018, 137: 269-276.

General Strong Convergence of Independent Identically Distributed Sequences with Sub-Linear Expectations

CHEN Binxia, WU Qunying

(*College of Science, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China*)

Abstract: In Choquet integral existence condition, the general strong convergence theorem of independent and identically distributed random variable sequences in sublinear expectation space is studied and extended, and the general strong convergence theorem of traditional probability space is extended to sublinear expectation space. The results generalize the corresponding results obtained by MENG (2019), and obtain two general strong law of large numbers (SLLN), in which the coefficients of the weighted sum are general functions. As a corollary, We obtain Marcinkiewicz-type SLLN, logarithmic SLLN and Marcinkiewicz SLLN of independent identically distributed random variable sequences.

Key words: Sub-linear expectation; Strong law of large number; Independent identical distribution