应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2020, 33(3): 733-746

偏序Menger PSM-空间中的耦合重合点定理

胡品，谷峰
(杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 311121)

摘要： 引入Menger概率S-度量空间的概念, 研究其拓扑性质, 基于混合g-单调映射的概念, 在偏序Menger PSM-空间中, 证明了自映象对满足ϕ-压缩条件下的耦合重合点和耦合公共不动点定理和推论, 并给出例子验证新结果的有效性.

关键词： Menger PSM-空间; 偏序集; 耦合重合点; 耦合公共不动点; 混合g-单调映射
中图分类号： O177.91　　**AMS(2000)主题分类：** 47H10; 54H25
文献标识码： A　　**文章编号：** 1001-9847(2020)03-0733-14

1. 引言

1942年, Menger[1]用分布函数代替非负实数作为度量值, 提出了Menger概率度量空间(简称Menger PM-空间)的概念. 1960年, Schweizer与Sklar[2−3]在Menger PM-空间中引进t-范数, 并讨论了该空间的一些性质. 1994年, 张石生等[4]对Menger PM-空间的一些重要性质进行了总结. 2006年, Mustafa和Sims[5]提出了G-度量空间的概念, 它是度量空间的一个推广. 在此之后, Sedghi, RAO和Shobe[6]研究了由Dhage[7]提出的D-度量空间, 同时引入了D^*-度量空间的概念. 2012年, Sedghi和Aliouche[8]提出了S-度量空间的概念, 它是G-度量空间与D^*-度量空间的一个推广.

2014年, ZHOU等[9]在G-度量空间和Menger PM-空间的基础上, 引入了Menger概率G-度量空间(简称为Menger PGM-空间)的概念, 并证明了几个不动点定理. 之后, ZHU等[10−11]在Menger PGM-空间中引入了ϕ-压缩条件和映象对弱相容的概念, 建立了若干公共不动点定理. 2015年, Hasanvand和Khanehgir[12]提出了Menger概率b-度量空间(简称为Menger PbM-空间)的概念, 并讨论了该空间中的不动点问题.

受上述研究工作的启发, 本文提出一类新的概率度量空间－Menger PSM-空间, 讨论了该空间的拓扑性质, 证明了偏序Menger PSM-空间中新的耦合重合点定理, 并给出了一个用以说明新结果有效性的实际例子.

2. 预备知识

设$\mathbb{R}$表示一切实数的集合, $\mathbb{R}^+$表示一切非负实数的集合, $\mathbb{Z}^+$表示所有正整数的集合, $\mathbb{N}$表示所有自然数的集合.

* **收稿日期：** 2019-08-21
基金项目： 国家自然科学基金资助 (11071169), 浙江省自然科学基金资助 (Y6110287)
作者简介： 胡品, 男, 汉族, 浙江人, 研究方向: 非线性泛函分析及应用.
通讯作者： 谷峰.

定义2.1[4] 称映射$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$为分布函数, 如果它是单调不减的, 左连续的, 且满足$\sup_{t\in\mathbb{R}}F(t)=1$和$\inf_{t\in\mathbb{R}}F(t)=0$.

用$\mathfrak{D}$表示一切分布函数的集合, $H(t)$表示一特殊的分布函数, 其定义如下:

$$H(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

定义2.2[2] 若映射$\Delta:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, 且$\forall a,b,c,d\in[0,1]$, 有下列条件被满足:

(Δ-1) $\Delta(a,1)=a$;

(Δ-2) $\Delta(a,b)=\Delta(b,a)$;

(Δ-3) $a\ge c, b\ge d\Rightarrow\Delta(a,b)\ge\Delta(c,d)$;

(Δ-4) $\Delta(\Delta(a,b),c)=\Delta(a,\Delta(b,c))$.

则称Δ为三角范数(简称t-范数).

三个典型的t-范数是:

$$\Delta_1(a,b)=\min\{a+b-1,0\},\ \ \Delta_2(a,b)=ab,\ \ \Delta_m(a,b)=\min\{a,b\},$$

$\forall a,b\in[0,1]$.

以上三个t-范数显然满足：$\Delta_1\le\Delta_2\le\Delta_m$.

定义2.3[4] 若映射$\Delta:[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$,且$\forall a,b,c,d,e,f\in[0,1]$, 有下列条件被满足:

(Δ-1) $\Delta(a,1,1)=a$;

(Δ-2) $\Delta(a,b,c)=\Delta(a,c,b)=\Delta(b,a,c)=\Delta(b,c,a)=\Delta(c,a,b)=\Delta(c,b,a)$;

(Δ-3) $a\ge d, b\ge e, c\ge f\Rightarrow\Delta(a,b,c)\ge\Delta(d,e,f)$;

(Δ-4) $\Delta(\Delta(a,b,c),d,e)=\Delta(a,\Delta(b,c,d),e)=\Delta(a,b,\Delta(c,d,e))$.

则称Δ为四边形范数(简称t-范数).

三个典型的t-范数是:

$$\Delta_1(a,b,c)=\min\{a+b+c-2,0\},\ \ \Delta_2(a,b,c)=abc,\ \ \Delta_m(a,b,c)=\min\{a,b,c\},$$

$\forall a,b,c\in[0,1]$.

以上三个t-范数显然满足: $\Delta_1\le\Delta_2\le\Delta_m$.

定义2.4[4] Menger PM-空间是一个三元组(X,F,Δ), 其中X是一个非空集合, Δ是一个连续的t-范数, $F:X\times X\to\mathfrak{D}$是满足下面条件的映射:

(PM-1) $F_{x,y}(t)=1\Leftrightarrow x=y$, $\forall x,y\in X$, $\forall t>0$;

(PM-2) $F_{x,y}(t)=F_{y,x}(t)$, $\forall x,y\in X$, $\forall t>0$;

(PM-3) $F_{x,z}(s+t)\ge\Delta(F_{x,y}(s),F_{y,z}(t))$, $\forall x,y,z\in X$, $\forall s,t>0$.

定义2.5[8] 设X是一个非空集合, $S:X\times X\times X\to\mathbb{R}^+$为一函数, 且满足以下条件:

(S1) $S(x,y,z)=0\Leftrightarrow x=y=z$;

(S2) $S(x,y,z)\le S(x,x,a)+S(y,y,a)+S(z,z,a)$, $\forall\, x,y,z,a\in X$.

则称函数S是X上的一个广义度量, 简称为X上的一个S-度量, 并称(X,S)是一个广义度量空间, 简称为S-度量空间.

定义2.6 Menger概率S-度量空间(简称Menger PSM-空间)是一个三元组(X,S^*,Δ), 其中X是一个非空集合, Δ是一个连续的t-范数, $S^*:X\times X\times X\to\mathfrak{D}$是满足下面条件的映射(其中$S^*_{x,y,z}$表示$S^*$在点$(x,y,z)$的值):

(PSM-1) $S^*_{x,y,z}(t)=H(t)\Leftrightarrow x=y=z$, $\forall x,y,z\in X$, $\forall t>0$;

(PSM-2) $S^*_{x,y,z}(r+s+t)\ge\Delta(S^*_{x,x,a}(r),S^*_{y,y,a}(s),S^*_{z,z,a}(t))$, $\forall x,y,z,a\in X$, $\forall r,s,t\ge0$.

下面我们给出Menger PSM-空间的具体例子.

例2.1 设$X=\mathbb{R}$, $S(x,y,z)=|x-z|+|y-z|$, $\forall x,y,z\in X$, 则(X,S)是S-度量空间.令

$$S^*_{x,y,z}(t)=\frac{t}{t+S(x,y,z)},$$

$\forall x,y,z\in X$, $\forall t>0$, $\Delta=\Delta_m$, 则(X,S^*,Δ_m)是一个Menger PSM-空间.

证 显然S^*满足(PSM-1), 下证S^*满足(PSM-2).

因为$S(x,y,z)\le S(x,x,a)+S(y,y,a)+S(z,z,a)$, 所以

$$\begin{aligned}S^*_{x,y,z}(r+s+t)&=\frac{r+s+t}{r+s+t+S(x,y,z)}\\&\ge\frac{r+s+t}{r+s+t+S(x,x,a)+S(y,y,a)+S(z,z,a)}\\&\ge\min\left\{\frac{r}{r+S(x,x,a)},\frac{s}{s+S(y,y,a)},\frac{t}{t+S(z,z,a)}\right\}\\&=\Delta\left(S^*_{x,x,a}(r),S^*_{y,y,a}(s),S^*_{z,z,a}(t)\right).\end{aligned}$$

故S^*满足(PSM-2), 即(X,S^*,Δ_m)是一个Menger PSM-空间.

引理2.1 设(X,S^*,Δ)是一个Menger PSM-空间, 则$S^*_{x,x,y}(t)=S^*_{y,y,x}(t)$, $\forall t>0$.

证 任取$t>0$, 则对任意的$0<\delta<t$, 由(PSM-2)得

$$\begin{aligned}S^*_{x,x,y}(t)&\ge\Delta\left(S^*_{x,x,x}\left(\frac{\delta}{2}\right),S^*_{x,x,x}\left(\frac{\delta}{2}\right),S^*_{y,y,x}(t-\delta)\right)\\&=\Delta\left(1,1,S^*_{y,y,x}(t-\delta)\right)=S^*_{y,y,x}(t-\delta).\end{aligned}$$

因为S^*是左连续的, 所以令$\delta\to0$, 则$S^*_{x,x,y}(t)\ge S^*_{y,y,x}(t)$.

同理可得$S^*_{x,x,y}(t)\le S^*_{y,y,x}(t)$. 所以$S^*_{x,x,y}(t)=S^*_{y,y,x}(t)$, $\forall t>0$.

定义2.7 设(X,S^*,Δ)是一个Menger PSM-空间, $x_0\in X$, 对于任意的$\epsilon>0$ 和$0<\delta<1$, 定义x_0的(ϵ,δ)-邻域如下:

$$N_{x_0}(\epsilon,\delta)=\left\{y\in X:S^*_{x_0,x_0,y}(\epsilon)>1-\delta\right\}.$$

引理2.2 若$0<\epsilon_1\le\epsilon_2$, $0<\delta_1\le\delta_2<1$, 则$N_{x_0}(\epsilon_1,\delta_1)\subset N_{x_0}(\epsilon_2,\delta_2)$.

证 任取$z\in N_{x_0}(\epsilon_1,\delta_1)$, 则对于任意的$\epsilon_1>0$, $0<\delta_1<1$, $S^*_{x_0,x_0,z}(\epsilon_1)>1-\delta_1$. 因为$S^*$是单调不减的, 所以

$$S^*_{x_0,x_0,z}(\epsilon_2)\ge S^*_{x_0,x_0,z}(\epsilon_1)>1-\delta_1\ge1-\delta_2.$$

因此, 由定义2.7得到$z\in N_{x_0}(\epsilon_2,\delta_2)$, 故$N_{x_0}(\epsilon_1,\delta_1)\subset N_{x_0}(\epsilon_2,\delta_2)$.

下面给出Menger PSM-空间的拓扑性质.

定理2.1 设(X,S^*,Δ)是一个Menger PSM-空间, 则(X,S^*,Δ)是一个Hausdorff 空间(在(ϵ,δ)-邻域族$\{N_{x_0}(\epsilon,\delta):x_0\in X,\epsilon>0,0<\delta<1\}$诱导的拓扑下), 即Menger PSM-空间$(X,S^*,\Delta)$具有下列性质:

(i) $\forall x_0\in X$, 至少存在x_0的一个邻域N_{x_0}, 并且x_0的任何一个邻域都包含x_0;

(ii) 若$N^1_{x_0}$和$N^2_{x_0}$是x_0的两个邻域, 则存在x_0的邻域$N^3_{x_0}$, 使得$N^3_{x_0}\subset N^1_{x_0}\cap N^2_{x_0}$;

(iii) 若N_{x_0}是x_0的邻域, 且$y_0\in N_{x_0}$, 则存在y_0的邻域N_{y_0}, 使得$N_{y_0}\subset N_{x_0}$;

(iv) 若$x_0\ne y_0$, 则存在x_0的邻域N_{x_0}和y_0的邻域N_{y_0}, 使得$x_0\in N_{x_0}$, $y_0\in N_{y_0}$, 且$N_{x_0}\cap N_{y_0}=\varnothing$.

证 (i) 任取x_0的邻域$N_{x_0}(\epsilon,\delta)$, 则对于任意的$\epsilon>0$, $0<\delta<1$, 因为$S^*_{x_0,x_0,x_0}(\epsilon)=1>1-\delta$, 所以$x_0\in N_{x_0}(\epsilon,\delta)$.

(ii) 对于任意的$\epsilon_1,\epsilon_2>0$, $0<\delta_1,\delta_2<1$, 令

$$N^1_{x_0}(\epsilon_1,\delta_1)=\left\{y\in X:S^*_{x_0,x_0,y}(\epsilon_1)>1-\delta_1\right\}.$$

和

$$N_{x_0}^2(\epsilon_2,\delta_2)=\left\{y\in X: S^*_{x_0,x_0,y}(\epsilon_2)>1-\delta_2\right\}.$$

则$N_{x_0}^1$和$N_{x_0}^2$是x_0的邻域.考虑

$$N_{x_0}^3=\left\{y\in X: S^*_{x_0,x_0,y}(\min\{\epsilon_1,\epsilon_2\})>1-\min\{\delta_1,\delta_2\}\right\}.$$

显然$x_0\in N_{x_0}^3$. 因为$\min\{\epsilon_1,\epsilon_2\}\le\epsilon_1$, $\min\{\delta_1,\delta_2\}\le\delta_1$, 所以由引理2.2得到$N_{x_0}^3\subset N_{x_0}^1(\epsilon_1,\delta_1)$.

同理可得$N_{x_0}^3\subset N_{x_0}^2(\epsilon_2,\delta_2)$. 因此$N_{x_0}^3\subset N_{x_0}^1\cap N_{x_0}^2$.

(iii) 令x_0的一个邻域$N_{x_0}=\left\{z\in X: S^*_{x_0,x_0,z}(\epsilon_1)>1-\delta_1\right\}$. 因为$y_0\in N_{x_0}$, 所以

$$S^*_{x_0,x_0,y_0}(\epsilon_1)>1-\delta_1.$$

由于S^*在ϵ_1处是左连续的, 故存在$\epsilon_0<\epsilon_1$, $0<\delta_0<\delta_1<1$, 使得

$$S^*_{x_0,x_0,y_0}(\epsilon_0)>1-\delta_0>1-\delta_1.$$

因为Δ是连续的, 且$\Delta(1-\delta_0,1,1)=1-\delta_0>1-\delta_1$, 所以存在$\delta_2\in[0,1]$, 使得

$$\Delta(1-\delta_0,1-\delta_2,1-\delta_2)>1-\delta_1.$$

令$N_{y_0}=\left\{z\in X: S^*_{y_0,y_0,z}(\epsilon_2)>1-\delta_2\right\}$, 其中$0<\epsilon_2<\frac{\epsilon_1-\epsilon_0}{2}$.

任取$u\in N_{y_0}$, 则$S^*_{y_0,y_0,u}(\epsilon_2)>1-\delta_2$. 由引理2.1和$S^*$的不减性得

$$\begin{aligned}S^*_{x_0,x_0,u}(\epsilon_1)&=S^*_{u,u,x_0}(\epsilon_1)\\&\ge\Delta\left(S^*_{u,u,y}\left(\frac{\epsilon_1-\epsilon_0}{2}\right),S^*_{u,u,y}\left(\frac{\epsilon_1-\epsilon_0}{2}\right),S^*_{x_0,x_0,y}(\epsilon_0)\right)\\&\ge\Delta(1-\delta_2,1-\delta_2,1-\delta_0)=\Delta(1-\delta_0,1-\delta_2,1-\delta_2)>1-\delta_1.\end{aligned}$$

因此$u\in N_{x_0}$, 即$N_{y_0}\subset N_{x_0}$.

(iv) 任取$x_0,y_0(x_0\ne y_0)$, 存在$\epsilon>0$, $0\le a<1$, 使得$S^*_{x_0,x_0,y_0}(\varepsilon)=a$. 因为$\Delta$是连续的, 且$\Delta(1,1,1)=1>a$, 所以存在$0\le b_1,b_2<1$, 使得$\Delta(b_1,b_1,b_2)>a$. 再令

$$N_{x_0}=\left\{z\in X: S^*_{x_0,x_0,z}\left(\frac{\epsilon}{3}\right)>b_1\right\}, N_{y_0}=\left\{z\in X: S^*_{y_0,y_0,z}\left(\frac{\epsilon}{3}\right)>b_2\right\}.$$

假设存在点$v\in N_{x_0}\cap N_{y_0}$, 于是有

$$S^*_{x_0,x_0,v}\left(\frac{\epsilon}{3}\right)>b_1,\quad S^*_{y_0,y_0,v}\left(\frac{\epsilon}{3}\right)>b_2.$$

由(PSM-2)有

$$a=S^*_{x_0,x_0,y_0}(\epsilon)\ge\Delta\left(S^*_{x_0,x_0,v}\left(\frac{\epsilon}{3}\right),\ S^*_{x_0,x_0,v}\left(\frac{\epsilon}{3}\right),\ S^*_{y_0,y_0,v}\left(\frac{\epsilon}{3}\right)\right)\ge\Delta(b_1,b_1,b_2)>a.$$

矛盾. 因此$N_{x_0}\bigcap N_{y_0}=\varnothing$. 结合(i)-(iv), (X,S^*,Δ)是一个Hausdorff空间.

下面给出Menger PSM-空间中序列收敛和柯西序列的概念.

定义2.8 设(X,S^*,Δ)是一个Menger PSM-空间, $\{x_n\}$是X中的序列, $x\in X$.

1) 若对任意的$\epsilon>0$, $0<\delta<1$, 存在正整数$M_{(\epsilon,\delta)}$, 使得当$n>M_{(\epsilon,\delta)}$时, $x_n\in N_x(\epsilon,\delta)$, 则称$\{x_n\}$收敛于点$x$, 记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$或者$x_n\to x(n\to\infty)$.

2) 若对任意的$\epsilon>0, 0<\delta<1$, 存在正整数$M_{(\epsilon,\delta)}$, 使得当$n,m,l>M_{(\epsilon,\delta)}$时, $S^*_{x_n,x_m,x_l}(\epsilon)>1-\delta$, 则称$\{x_n\}$是$X$中的一个柯西序列;

3) 若X中的所有柯西序列都在X中收敛, 则称(X,S^*,Δ)是完备的.

引理2.3 设(X,S^*,Δ)是一个Menger PSM-空间, $\{x_n\}$是X中的序列, 则以下叙述等价:

1) $\{x_n\}$收敛于点$x\in X$;

2) $S^*_{x_n,x_n,x}(t)\to1(n\to\infty)$, $\forall t>0$;

3) $S^*_{x,x,x_n}(t)\to1(n\to\infty)$, $\forall t>0$.

证 1) $\Rightarrow$ 2).

因为$x_n \to x(n \to \infty)$, 所以对于任意的$\epsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, 存在正整数$M_{(\epsilon,\delta)}$, 使得当$n > M_{(\epsilon,\delta)}$时, $x_n \in N_x(\epsilon,\delta)$, 故$S^*_{x_n,x_n,x}(\epsilon) > 1-\delta$, 即$S^*_{x_n,x_n,x}(\epsilon) - 1 > -\delta$.

并且$S^*_{x_n,x_n,x}(\epsilon) < 1+\delta$, 因此$|S^*_{x_n,x_n,x}(\epsilon) - 1| < \delta$, 所以$S^*_{x_n,x_n,x}(t) \to 1(n \to \infty)$, $\forall t > 0$.

2) $\Rightarrow$ 1)　因为$S^*_{x_n,x_n,x}(t) \to 1(n \to \infty)$, $\forall t > 0$, 所以对于任意的$\epsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, 存在$M_{(\epsilon,\delta)}$, 使得当$n > M_{(\epsilon,\delta)}$时, $|S^*_{x_n,x_n,x}(\epsilon) - 1| < \delta$, 于是$S^*_{x_n,x_n,x}(\epsilon) > 1-\delta$, 所以$x_n \in N_x(\epsilon,\delta)$. 由定义2.81)得$\{x_n\}$收敛于点$x \in X$.

2) $\Leftrightarrow$ 3)　由引理2.1显然成立.

引理2.4　设(X, S^*, Δ)是一个具有连续t-范数Δ的Menger PSM-空间, 则以下叙述等价:

1) 序列$\{x_n\}$是柯西序列;

2) 对任意的$\epsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, 存在正整数$M_{(\epsilon,\delta)}$, 使得当$n, m > M_{(\epsilon,\delta)}$时, $S^*_{x_n,x_n,x_m}(\epsilon) > 1-\delta$.

证　1) $\Rightarrow$ 2)　由定义2.8中2)直接可得.

2) $\Rightarrow$ 1)　因为Δ是连续的, 且$\Delta(1,1,1) = 1$, 所以对于任意的$\epsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, 存在$\delta_0 \in [0,1]$, 使得

$$\Delta(1, 1-\delta_0, 1-\delta_0) > 1-\delta.$$

由2)得存在正整数$M_{(\epsilon,\delta)}$, 使得当$n, m, l > M_{(\epsilon,\delta)}$时

$$S^*_{x_m,x_m,x_n}\left(\frac{\epsilon}{3}\right) = S^*_{x_n,x_n,x_m}\left(\frac{\epsilon}{3}\right) > 1-\delta_0,\ \ S^*_{x_l,x_l,x_n}\left(\frac{\epsilon}{3}\right) = S^*_{x_n,x_n,x_l}\left(\frac{\epsilon}{3}\right) > 1-\delta_0.$$

于是

$$\begin{aligned} S^*_{x_n,x_m,x_l}(\epsilon) &\geq \Delta\left(S^*_{x_n,x_n,x_n}\left(\frac{\epsilon}{3}\right), S^*_{x_m,x_m,x_n}\left(\frac{\epsilon}{3}\right), S^*_{x_l,x_l,x_n}\left(\frac{\epsilon}{3}\right)\right) \\ &> \Delta(1, 1-\delta_0, 1-\delta_0) > 1-\delta. \end{aligned}$$

因此$\{x_n\}$是柯西序列.

定理2.2　设(X, S^*, Δ)是一个具有连续t-范数Δ的Menger PSM-空间, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$是X中的两个序列, $x, y \in X$. 如果$x_n \to x$, $y_n \to y(n \to \infty)$, 则对于任意的$t > 0$, $S^*_{x_n,x_n,y_n}(t) \to S^*_{x,x,y}(t)(n \to \infty)$.

证　对于任意的$t > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得$t > 2\delta$, 则

$$\begin{aligned} S^*_{x_n,x_n,y_n}(t) &\geq S^*_{x_n,x_n,y_n}(t-\delta) \\ &\geq \Delta\left(S^*_{x_n,x_n,x}\left(\frac{\delta}{4}\right), S^*_{x_n,x_n,x}\left(\frac{\delta}{4}\right), S^*_{y_n,y_n,x}\left(t-\frac{3\delta}{2}\right)\right) \\ &\geq \Delta\left(\begin{array}{c} S^*_{x_n,x_n,x}\left(\frac{\delta}{4}\right), S^*_{x_n,x_n,x}\left(\frac{\delta}{4}\right), \\ \Delta\left(S^*_{y_n,y_n,y}\left(\frac{\delta}{4}\right), S^*_{y_n,y_n,y}\left(\frac{\delta}{4}\right), S^*_{x,x,y}(t-2\delta)\right) \end{array}\right) \\ &= \Delta\left(\begin{array}{c} S^*_{x,x,x_n}\left(\frac{\delta}{4}\right), S^*_{x,x,x_n}\left(\frac{\delta}{4}\right), \\ \Delta\left(S^*_{y,y,y_n}\left(\frac{\delta}{4}\right), S^*_{y,y,y_n}\left(\frac{\delta}{4}\right), S^*_{x,x,y}(t-2\delta)\right) \end{array}\right). \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} S^*_{x,x,y}(t) &\geq S^*_{x,x,y}(t-\delta) \\ &\geq \Delta\left(S^*_{x,x,x_n}\left(\frac{\delta}{4}\right), S^*_{x,x,x_n}\left(\frac{\delta}{4}\right), S^*_{y,y,x_n}\left(t-\frac{3\delta}{2}\right)\right) \\ &\geq \Delta\left(\begin{array}{c} S^*_{x,x,x_n}\left(\frac{\delta}{4}\right), S^*_{x,x,x_n}\left(\frac{\delta}{4}\right), \\ \Delta\left(S^*_{y,y,y_n}\left(\frac{\delta}{4}\right), S^*_{y,y,y_n}\left(\frac{\delta}{4}\right), S^*_{x_n,x_n,y_n}(t-2\delta)\right) \end{array}\right). \end{aligned}$$

在以上两个不等式中令$n \to \infty$, 注意到Δ是连续的, 则

$$\lim_{n\to\infty} S^*_{x_n,x_n,y_n}(t) \geq S^*_{x,x,y}(t-2\delta).$$

且

$$S^*_{x,x,y}(t) \geq \lim_{n\to\infty} S^*_{x_n,x_n,y_n}(t-2\delta).$$

令$\delta \to 0$, 因为S^*是左连续的, 所以对于任意的$t>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} S^*_{x_n,x_n,y_n}(t) = S^*_{x,x,y}(t)$.

定义2.9[13] Δ称为是一个H型t-范数，若函数族$\{\Delta^n(t)\}_{n=1}^{\infty}$在$t=1$处是等度连续的, 即对任意的$\epsilon \in (0,1)$, 存在$\delta \in (0,1)$, 使得$t>1-\delta \Rightarrow \Delta^n(t) > 1-\epsilon$, $n \in \mathbb{Z}^+$, 其中$\Delta^1(t) = \Delta(t,t,t)$, $\Delta^m(t) = \Delta(t,t,\Delta^{m-1}(t))$, $m=2,3,\cdots$, $t\in[0,1]$.

显然有$\Delta^m(t) \leq t$, $\forall m \in \mathbb{Z}^+$, $t>0$.

一个典型的H型t-范数是: $\Delta_m = \min\{a,b,c\}$, 其中$a,b,c \in [0,1]$.

引理2.5 设(X,S^*,Δ)是一个Menger PSM-空间, 对于任意的$\lambda \in (0,1]$, 定义函数S^*_λ如下:

$$S^*_\lambda(x,y,z) = \inf_t\{t\geq 0 : S^*_{x,y,z}(t) > 1-\lambda\}, x,y,z \in X.$$

则有以下结论成立:

1) $S^*_\lambda(x,y,z) < t \Leftrightarrow S^*_{x,y,z}(t) > 1-\lambda$;

2) 对于任意的$\lambda \in (0,1]$, $S^*_\lambda(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x=y=z$;

3) 如果$\Delta = \Delta_m$, 则对每个$\lambda \in (0,1]$, 有$S^*_\lambda(x,y,z) \leq S^*_\lambda(x,x,a) + S^*_\lambda(y,y,a) + S^*_\lambda(z,z,a)$.

证 1), 2)容易验证, 下证3).

任取$\lambda \in (0,1]$, $\epsilon>0$, 因为$S^*_\lambda(x,x,a) < S^*_\lambda(x,x,a) + \frac{\epsilon}{3}$, 所以由1)可知

$$S^*_{x,x,a}\left(S^*_\lambda(x,x,a) + \frac{\epsilon}{3}\right) > 1-\lambda.$$

同理也有

$$S^*_{y,y,a}\left(S^*_\lambda(y,y,a) + \frac{\epsilon}{3}\right) > 1-\lambda.$$

$$S^*_{z,z,a}\left(S^*_\lambda(z,z,a) + \frac{\epsilon}{3}\right) > 1-\lambda.$$

因为$\Delta = \Delta_m$, 所以

$$\begin{aligned}&S^*_{x,y,z}(S^*_\lambda(x,x,a) + S^*_\lambda(y,y,a) + S^*_\lambda(z,z,a) + \epsilon)\\ \geq{}& \min\left\{S^*_{x,x,a}\left(S^*_\lambda(x,x,a) + \frac{\epsilon}{3}\right), S^*_{y,y,a}\left(S^*_\lambda(y,y,a) + \frac{\epsilon}{3}\right), S^*_{z,z,a}\left(S^*_\lambda(z,z,a) + \frac{\epsilon}{3}\right)\right\}\\ >{}& \min\{1-\lambda, 1-\lambda, 1-\lambda\} = 1-\lambda.\end{aligned}$$

因此由1)得

$$S^*_\lambda(x,y,z) \leq S^*_\lambda(x,x,a) + S^*_\lambda(y,y,a) + S^*_\lambda(z,z,a) + \epsilon.$$

令$\epsilon \to 0$, 得到

$$S^*_\lambda(x,y,z) \leq S^*_\lambda(x,x,a) + S^*_\lambda(y,y,a) + S^*_\lambda(z,z,a).$$

定义2.10[10] 设$\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, 满足下述条件:

1) ϕ是非减的;

2) ϕ是右上半连续的;

3) $\Sigma_{n=0}^{\infty}\phi^n(t) < +\infty$, $\forall t>0$, 其中$\phi^n(t)$是$\phi(t)$的n次迭代.

我们把满足1)-3)的函数ϕ的全体记为$\varPhi_1$.

易知, 如果$\phi \in \varPhi_1$, 则$\phi(t) < t$, $\forall t>0$.

引理2.6 设(X,S^*,Δ)是一个Menger PSM-空间, $x,y,z \in X$. 如果存在$\phi \in \varPhi_1$使得

$$S^*_{x,y,z}(\phi(t)+o) \geq S^*_{x,y,z}(t), \quad \forall t>0, \tag{2.1}$$

则$x=y=z$.

证　令$\lambda \in (0,1]$, $a = S_\lambda^*(x,y,z)$. 因为$\phi(\cdot)$在点a处是右上半连续的, 所以给定$\epsilon > 0$, 存在$s > a$, 使得$\phi(s) < \phi(a) + \epsilon$. 由引理2.5, 因$s > S_\lambda^*(x,y,z)$, 所以$S_{x,y,z}^*(s) > 1-\lambda$. 于是根据式(2.1)有

$$S_{x,y,z}^*(\phi(s)+\epsilon) \geq S_{x,y,z}^*(\phi(s)+o) \geq S_{x,y,z}^*(s) > 1-\lambda.$$

故$S_\lambda^*(x,y,z) < \phi(s)+\epsilon < \phi(a)+2\epsilon$. 由$\epsilon$的任意性可得$a = S_\lambda^*(x,y,z) \leq \phi(a)$, 因此$a = 0$, 即$S_\lambda^*(x,y,z) = 0$. 由引理2.5知$x = y = z$.

定义2.11[14]　设$(X,\leq)$是一个偏序集合, $G: X\times X \to X$. 映射G被称为是混合单调的, 如果G关于第一个变量单调不减, 关于第二个变量单调不增, 即对于任意的$x,y\in X$,

$$x_1,x_2\in X, x_1\leq x_2 \Rightarrow G(x_1,y)\leq G(x_2,y),$$
$$y_1,y_2\in X, y_1\leq y_2 \Rightarrow G(x,y_1)\geq G(x,y_2).$$

定义2.12[14]　一个元素$(x,y)\in X\times X$被称为是映射$G: X\times X\to X$的耦合不动点, 如果$G(x,y)=x, G(y,x)=y$.

定义2.13[14]　设$(X,\leq)$是一个偏序集合, $G: X\times X\to X$, $g: X\to X$. 映射G被称为是混合g-单调的, 如果G 关于第一个变量g-单调不减, 关于第二个变量g-单调不增, 即对于任意的$x,y\in X$,

$$x_1,x_2\in X, g(x_1)\leq g(x_2) \Rightarrow G(x_1,y)\leq G(x_2,y),$$
$$y_1,y_2\in X, g(y_1)\leq g(y_2) \Rightarrow G(x,y_1)\geq G(x,y_2).$$

注2.1　若映射g是恒等映射, 则定义2.11和定义2.13等价.

定义2.14[15]　一个元素$(x,y)\in X\times X$被称为是映射$G: X\times X\to X$和$g: X\to X$的耦合重合点, 如果$G(x,y)=g(x), G(y,x)=g(y)$. 称(x,y)是G和g的耦合公共不动点, 如果$G(x,y)=g(x)=x, G(y,x)=g(y)=y$.

定义2.15[15]　设X是一个非空集合, $G: X\times X\to X$, $g: X\to X$. 映射G和g被称为是可交换的, 如果对于任意的$x,y\in X$, $g(G(x,y)) = G(g(x),g(y))$.

3. 主要结果

引理3.1　设(X,S^*,Δ)是一个Menger PSM-空间, $\{S_\lambda^*\}_{\lambda\in(0,1]}$是由引理2.5所定义的$X$上的函数族. 如果$\Delta$是$H$型$t$-范数, 则对任意的$\lambda\in(0,1]$, 存在$\mu\in(0,\lambda]$, 使得对任意的$m\in\mathbb{Z}^+$, $x_0,x_1,\cdots,x_m\in X$，有

$$S_\lambda^*(x_0,x_0,x_m) \leq 2\Sigma_{i=0}^{m-1} S_\mu^*(x_i,x_i,x_{i+1})$$

证　由Δ是H型t-范数, 故对任意的$m\in\mathbb{Z}^+$, $x_0,x_1,\cdots,x_m\in X$, 存在$\mu\in(0,\lambda]$, 使得$\Delta^m(1-\mu) > 1-\lambda$.

令$\frac{t_i}{2} = S_\mu^*(x_i,x_i,x_{i+1}) (i=0,1,2,\cdots,m-1)$, 则对任意的$\epsilon > 0$, 有

$$S_\mu^*(x_i,x_i,x_{i+1}) < \frac{t_i}{2} + \frac{\epsilon}{2m}.$$

于是由引理2.5 1)可得, $S_{x_i,x_i,x_{i+1}}^*\left(\frac{t_i}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right) > 1-\mu$. 因此,

$$\begin{aligned}
&S_{x_0,x_0,x_m}^*(t_0+t_1+\cdots+t_{m-1}+\epsilon)\\
&\geq \Delta\left(S_{x_0,x_0,x_1}^*\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right), S_{x_0,x_0,x_1}^*\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right), S_{x_m,x_m,x_1}^*\left(t_1+\cdots+t_{m-1}+\frac{m-1}{m}\epsilon\right)\right)\\
&= \Delta\left(S_{x_0,x_0,x_1}^*\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right), S_{x_0,x_0,x_1}^*\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right), S_{x_1,x_1,x_m}^*\left(t_1+\cdots+t_{m-1}+\frac{m-1}{m}\epsilon\right)\right)\\
&\geq \Delta\left(\begin{array}{c} S_{x_0,x_0,x_1}^*\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right), S_{x_0,x_0,x_1}^*\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right),\\ \Delta\left(S_{x_1,x_1,x_2}^*\left(\frac{t_1}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right), S_{x_1,x_1,x_2}^*\left(\frac{t_1}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right), S_{x_m,x_m,x_2}^*\left(t_2+\cdots+t_{m-1}+\frac{m-2}{m}\epsilon\right)\right)\end{array}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Delta\left(\begin{array}{c} S^*_{x_0,x_0,x_1}\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right), S^*_{x_0,x_0,x_1}\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right), \\ \Delta\left(S^*_{x_1,x_1,x_2}\left(\frac{t_1}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right), S^*_{x_1,x_1,x_2}\left(\frac{t_1}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right), S^*_{x_2,x_2,x_m}\left(t_2+\cdots+t_{m-1}+\frac{m-2}{m}\epsilon\right)\right) \end{array}\right) \\
&\geq \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\geq \Delta\left(\begin{array}{c} S^*_{x_0,x_0,x_1}\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right), S^*_{x_0,x_0,x_1}\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right), \\ \Delta\left(\cdots\Delta\left(\begin{array}{c} S^*_{x_{m-2},x_{m-2},x_{m-1}}\left(\frac{t_{m-2}}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right), S^*_{x_{m-2},x_{m-2},x_{m-1}}\left(\frac{t_{m-2}}{2}+\frac{\epsilon}{2m}\right), \\ S^*_{x_{m-1},x_{m-1},x_m}\left(t_{m-1}+\frac{\epsilon}{m}\right) \end{array}\right)\right) \end{array}\right) \\
&\geq \Delta^m(1-\mu) > 1-\lambda.
\end{aligned}
$$

由引理2.5中1)可得, $S^*_\lambda(x_0,x_0,x_m) \leq t_0+t_1+\cdots+t_{m-1}+\epsilon$. 令$\epsilon \to 0$, 可得到

$$S^*_\lambda(x_0,x_0,x_m) \leq 2\Sigma_{i=0}^{m-1} S^*_\mu(x_i,x_i,x_{i+1}).$$

引理3.2 设(X,S^*,Δ)是一个Menger PSM-空间, 其中Δ是H型t-范数, $\{y_n\} \subset X$. 若存在函数$\phi \in \Phi_1$, 使得

$$S^*_{y_n,y_n,y_{n+1}}(\phi(t)) \geq \min\{S^*_{y_{n-1},y_{n-1},y_n}(t), S^*_{y_n,y_n,y_{n+1}}(t)\}, \tag{3.1}$$

$\forall t>0$, $n \in Z^+$, 则$\{y_n\}$是X中的柯西序列.

证 设$\{S^*_\lambda\}_{\lambda\in(0,1]}$是由引理2.5所定义的$X$上的函数族, 对于任意的$\lambda \in (0,1]$, $n \in \mathbb{Z}^+$, 令$a_n = S^*_\lambda(y_{n-1},y_{n-1},y_n)$, 下证对于任意的$n \in \mathbb{Z}^+$, $a_{n+1} \leq \phi(a_n)$.

事实上, 由于ϕ是右上半连续的, 所以对任意的$\epsilon > 0$和每个a_n, 存在$p_n > a_n$, 使得$\phi(p_n) < \phi(a_n)+\epsilon$. 由引理2.5中1)和$p_n > a_n = S^*_\lambda(y_{n-1},y_{n-1},y_n)$可知, 对于任意的$n \in \mathbb{Z}^+$, $S^*_{y_{n-1},y_{n-1},y_n}(p_n) > 1-\lambda$. 因此由式(3.1)可得

$$
\begin{aligned}
&S^*_{y_n,y_n,y_{n+1}}(\phi(\max\{p_n,p_{n+1}\})) \\
&\geq \min\{S^*_{y_{n-1},y_{n-1},y_n}(\max\{p_n,p_{n+1}\}), S^*_{y_n,y_n,y_{n+1}}(\max\{p_n,p_{n+1}\})\} \\
&\geq \min\{S^*_{y_{n-1},y_{n-1},y_n}(p_n), S^*_{y_n,y_n,y_{n+1}}(p_{n+1})\} > 1-\lambda.
\end{aligned}
$$

于是, 由引理2.5中1)可得

$$
\begin{aligned}
S^*_\lambda(y_n,y_n,y_{n+1}) &< \phi(\max\{p_n,p_{n+1}\}) \\
&= \max\{\phi(p_n),\phi(p_{n+1})\} \\
&\leq \phi(\max\{a_n,a_{n+1}\})+\epsilon.
\end{aligned}
$$

再由ϵ的任意性, 可知$a_{n+1} = S^*_\lambda(y_n,y_n,y_{n+1}) \leq \phi(\max\{a_n,a_{n+1}\})$.

若$\max\{a_n,a_{n+1}\} = a_{n+1}$, 则可得$a_{n+1} \leq \phi(a_{n+1}) < a_{n+1}$, 矛盾. 所以

$$\max\{a_n,a_{n+1}\} = a_n.$$

因此$a_{n+1} \leq \phi(a_n)$, 于是可得

$$S^*_\lambda(y_n,y_n,y_{n+1}) \leq \phi(S^*_\lambda(y_{n-1},y_{n-1},y_n)) \leq \cdots \leq \phi^n(S^*_\lambda(y_0,y_0,y_1)). \tag{3.2}$$

由Δ是H型t-范数和引理3.1知, 对任意的$\lambda \in (0,1]$, 存在$\mu \in (0,\lambda]$, 使得

$$S^*_\lambda(y_n,y_n,y_m) \leq 2\Sigma_{i=n}^{m-1} S^*_\mu(y_i,y_i,y_{i+1}), \tag{3.3}$$

其中$m,n \in \mathbb{Z}^+$, 且$m > n$. 由$\phi \in \Phi_1$, 可得$\Sigma_{n=0}^{\infty}\phi^n(S^*_\mu(y_0,y_0,y_1)) < +\infty$. 对给定的$\epsilon > 0$, 存在$n_0 \in \mathbb{Z}^+$, 当$n \geq n_0$时有$\Sigma_{i=n}^{\infty}\phi^i(S^*_\mu(y_0,y_0,y_1)) < \frac{\epsilon}{2}$. 从而由式(3.2)和(3.3)知, 对于任意的$n \geq n_0$, 有

$$S^*_\lambda(y_n,y_n,y_m) \leq 2\Sigma_{i=n}^{\infty} S^*_\mu(y_i,y_i,y_{i+1}) \leq 2\Sigma_{i=n}^{\infty}\phi^n(S^*_\mu(y_0,y_0,y_1)) < \epsilon.$$

由此及引理2.5中1)得$S^*_{y_n,y_n,y_m}(\epsilon) > 1-\lambda$, $\forall m,n \in \mathbb{Z}^+$, $m > n \geq n_0$. 再由引理2.4可知$\{y_n\}$是X中的柯西序列.

定理3.1　设$(X,\leq)$是一个偏序集合, (X,S^*,Δ)是一个完备的Menger PSM-空间, 其中$\Delta(a,b,c)=\min\{a,b,c\}$, $\forall a,b,c\in[0,1]$. 设$G:X\times X\to X$, $g:X\to X$是两个映射, 映射G是混合g-单调的, 并且存在$\phi\in\Phi_1$使得

$$S^*_{G(x,y),G(x,y),G(u,v)}(\phi(t))\geq\min\left\{\begin{array}{c}S^*_{g(x),g(x),g(u)}(t),S^*_{g(x),g(x),G(x,y)}(t),\\ S^*_{g(u),g(u),G(u,v)}(t)\end{array}\right\},\tag{3.4}$$

$\forall x,y,u,v\in X$, $t>0$, $g(x)\geq g(u)$, $g(y)\leq g(v)$(或者$g(x)\leq g(u)$, $g(y)\geq g(v)$). 假设$G(X\times X)\subseteq g(X)$, g是连续的, 映射g和G是可交换的, 且下列条件之一被满足:

(a) G是连续的;

(b) X有如下性质:

(i) 若$\{x_n\}$是一个不减序列且$x_n\to x(n\to\infty)$, 则$x_n\leq x$, $\forall n\in\mathbb{N}$;

(ii) 若$\{y_n\}$是一个不增序列且$y_n\to y(n\to\infty)$, 则$y\leq y_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

如果存在x_0, $y_0\in X$, 使得$g(x_0)\leq G(x_0,y_0)$, $g(y_0)\geq G(y_0,x_0)$, 则存在$x,y\in X$, 使得$g(x)=G(x,y)$, $g(y)=G(y,x)$, 即映射G和g有耦合重合点.

证　设x_0, $y_0\in X$, 且满足$g(x_0)\leq G(x_0,y_0)$, $g(y_0)\geq G(y_0,x_0)$. 因为$G(X\times X)\subseteq g(X)$, 则存在$x_1$, $y_1\in X$, 使得$g(x_1)=G(x_0,y_0)$, $g(y_1)=G(y_0,x_0)$. 同样地, 存在x_2, $y_2\in X$, 使得$g(x_2)=G(x_1,y_1)$, $g(y_2)=G(y_1,x_1)$. 一直重复下去, 可得X中的两个序列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$: $g(x_{n+1})=G(x_n,y_n)$, $g(y_{n+1})=G(y_n,x_n)$, $\forall n\geq 0$.

下证对于任意的$n\geq 0$, $g(x_n)\leq g(x_{n+1})$, $g(y_n)\geq g(y_{n+1})$.

当$n=0$时, 因为$g(x_0)\leq G(x_0,y_0)$, $g(y_0)\geq G(y_0,x_0)$, 并且$g(x_1)=G(x_0,y_0)$, $g(y_1)=G(y_0,x_0)$, 所以$g(x_0)\leq g(x_1)$, $g(y_0)\geq g(y_1)$. 因此当$n=0$时, 结论成立.

假设当$n=k$时, $g(x_k)\leq g(x_{k+1})$, $g(y_k)\geq g(y_{k+1})$. 则当$n=k+1$时, 因为G是混合$g-$单调的, 所以

$$g(x_{k+1})=G(x_k,y_k)\leq G(x_{k+1},y_k),G(y_{k+1},x_k)\leq G(y_k,x_k)=g(y_{k+1}),$$
$$g(x_{k+2})=G(x_{k+1},y_{k+1})\geq G(x_{k+1},y_k),G(y_{k+1},x_k)\geq G(y_{k+1},x_{k+1})=g(y_{k+2}).$$

于是得到$g(x_{k+1})\leq g(x_{k+2})$, $g(y_{k+1})\geq g(y_{k+2})$, 即当$n=k+1$时, 结论成立. 因此可得

$$g(x_0)\leq g(x_1)\leq g(x_2)\leq\cdots\leq g(x_n)\leq g(x_{n+1})\leq\cdots,$$
$$g(y_0)\geq g(y_1)\geq g(y_2)\geq\cdots\geq g(y_n)\geq g(y_{n+1})\geq\cdots.$$

在式(3.4)令$x=x_{n-1}$, $y=y_{n-1}$, $u=x_n$, $v=y_n$, 则有

$$\begin{aligned}&S^*_{G(x_{n-1},y_{n-1}),G(x_{n-1},y_{n-1}),G(x_n,y_n)}(\phi(t))\\ &\geq\min\left\{\begin{array}{c}S^*_{g(x_{n-1}),g(x_{n-1}),g(x_n)}(t),S^*_{g(x_{n-1}),g(x_{n-1}),G(x_{n-1},y_{n-1})}(t),\\ S^*_{g(x_n),g(x_n),G(x_n,y_n)}(t)\end{array}\right\},\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}S^*_{g(x_n),g(x_n),g(x_{n+1})}(\phi(t))&\geq\min\left\{\begin{array}{c}S^*_{g(x_{n-1}),g(x_{n-1}),g(x_n)}(t),S^*_{g(x_{n-1}),g(x_{n-1}),g(x_n)}(t),\\ S^*_{g(x_n),g(x_n),g(x_{n+1})}(t)\end{array}\right\}\\ &=\min\{S^*_{g(x_{n-1}),g(x_{n-1}),g(x_n)}(t),S^*_{g(x_n),g(x_n),g(x_{n+1})}(t)\}.\end{aligned}$$

由引理3.2知$\{g(x_n)\}$是一个柯西序列.

在式(3.4)令$x=y_{n-1}$, $y=x_{n-1}$, $u=y_n$, $v=x_n$, 则有

$$\begin{aligned}&S^*_{G(y_{n-1},x_{n-1}),G(y_{n-1},x_{n-1}),G(y_n,x_n)}(\phi(t))\\ &\geq\min\left\{\begin{array}{c}S^*_{g(y_{n-1}),g(y_{n-1}),g(y_n)}(t),S^*_{g(y_{n-1}),g(y_{n-1}),G(y_{n-1},x_{n-1})}(t),\\ S^*_{g(y_n),g(y_n),G(y_n,x_n)}(t)\end{array}\right\},\end{aligned}$$

即

$$S^*_{g(y_n),g(y_n),g(y_{n+1})}(\phi(t)) \geq \min\left\{ \begin{array}{c} S^*_{g(y_{n-1}),g(y_{n-1}),g(y_n)}(t), S^*_{g(y_{n-1}),g(y_{n-1}),g(y_n)}(t), \\ S^*_{g(y_n),g(y_n),g(y_{n+1})}(t) \end{array} \right\}$$

$$= \min\{S^*_{g(y_{n-1}),g(y_{n-1}),g(y_n)}(t), S^*_{g(y_n),g(y_n),g(y_{n+1})}(t)\}.$$

由引理3.2知$\{g(y_n)\}$也是一个柯西序列.

因为X是完备的, 所以存在$x, y \in X$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = x, \lim_{n\to\infty} g(y_n) = y.$$

由g的连续性可得

$$\lim_{n\to\infty} g(g(x_n)) = g(x), \lim_{n\to\infty} g(g(y_n)) = g(y).$$

因为G和g是可交换的, 所以

$$g(g(x_{n+1})) = g(G(x_n, y_n)) = G(g(x_n), g(y_n)), \tag{3.5}$$

$$g(g(y_{n+1})) = g(G(y_n, x_n)) = G(g(y_n), g(x_n)). \tag{3.6}$$

下证$g(x) = G(x, y)$, $g(y) = G(y, x)$.

假设条件(a)满足, 在式(3.5),(3.6)中令$n \to \infty$, 由G的连续性可得

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(g(x_{n+1})) = \lim_{n\to\infty} G(g(x_n), g(y_n)) = G(\lim_{n\to\infty} g(x_n), \lim_{n\to\infty} g(y_n)) = G(x, y),$$

$$g(y) = \lim_{n\to\infty} g(g(y_{n+1})) = \lim_{n\to\infty} G(g(y_n), g(x_n)) = G(\lim_{n\to\infty} g(y_n), \lim_{n\to\infty} g(x_n)) = G(y, x).$$

因此, $g(x) = G(x, y)$, $g(y) = G(y, x)$.

假设条件(b)满足, 因为$\{g(x_n)\}$是不减的, $\{g(y_n)\}$是不增的, 并且当$n \to \infty$, $g(x_n) \to x$, $g(y_n) \to y$, 所以由条件(b)可知$g(x_n) \leq x$, $g(y_n) \geq y$, $\forall n \geq 0$. 则由(PSM-2)和式(3.4)有

$$\begin{aligned} S^*_{g(x),g(x),G(x,y)}(\phi(t)) &\geq \Delta\left(\begin{array}{c} S^*_{g(x),g(x),g(g(x_{n+1}))}\left(\frac{\phi(t)-\phi(kt)}{2}\right), S^*_{g(x),g(x),g(g(x_{n+1}))}\left(\frac{\phi(t)-\phi(kt)}{2}\right), \\ S^*_{G(x,y),G(x,y),g(g(x_{n+1}))}(\phi(kt)) \end{array} \right) \\ &= \min\left\{ \begin{array}{c} S^*_{g(x),g(x),g(g(x_{n+1}))}\left(\frac{\phi(t)-\phi(kt)}{2}\right), S^*_{g(x),g(x),g(g(x_{n+1}))}\left(\frac{\phi(t)-\phi(kt)}{2}\right), \\ S^*_{G(x,y),G(x,y),g(g(x_{n+1}))}(\phi(kt)) \end{array} \right\} \\ &= \min\left\{ \begin{array}{c} S^*_{g(x),g(x),g(g(x_{n+1}))}\left(\frac{\phi(t)-\phi(kt)}{2}\right), S^*_{g(x),g(x),g(g(x_{n+1}))}\left(\frac{\phi(t)-\phi(kt)}{2}\right), \\ S^*_{G(x,y),G(x,y),G(g(x_n),g(y_n))}(\phi(kt)) \end{array} \right\} \\ &\geq \min\left\{ \begin{array}{c} S^*_{g(x),g(x),g(g(x_{n+1}))}\left(\frac{\phi(t)-\phi(kt)}{2}\right), S^*_{g(x),g(x),g(g(x_n))}(kt), \\ S^*_{g(x),g(x),G(x,y)}(kt), S^*_{g(g(x_n)),g(g(x_n)),G(g(x_n),g(y_n))}(kt) \end{array} \right\}, \\ &= \min\left\{ \begin{array}{c} S^*_{g(x),g(x),g(g(x_{n+1}))}\left(\frac{\phi(t)-\phi(kt)}{2}\right), S^*_{g(x),g(x),g(g(x_n))}(kt), \\ S^*_{g(x),g(x),G(x,y)}(kt), S^*_{g(g(x_n)),g(g(x_n)),g(g(x_{n+1}))}(kt) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

$\forall t > 0$, $k \in (0, 1)$. 由定理2.2可得

$$\begin{aligned} S^*_{g(x),g(x),G(x,y)}(\phi(t)) &\geq \min\left\{ \begin{array}{c} S^*_{g(x),g(x),g(x)}\left(\frac{\phi(t)-\phi(kt)}{2}\right), S^*_{g(x),g(x),g(x)}(kt), \\ S^*_{g(x),g(x),G(x,y)}(kt), S^*_{g(x),g(x),g(x)}(\phi(kt)) \end{array} \right\} \\ &= \min\{1, 1, S^*_{g(x),g(x),G(x,y)}(kt), 1\} \\ &= S^*_{g(x),g(x),G(x,y)}(kt). \end{aligned}$$

令$k \to 1$, 因为S^*是左连续的, 所以$S^*_{g(x),g(x),G(x,y)}(\phi(t) + o) \geq S^*_{g(x),g(x),G(x,y)}(t)$. 由引理2.6可得$g(x) = G(x, y)$.

同理可得$g(y)=G(y,x)$, 因此(x,y)是映射G和g的耦合重合点.

下证讨论耦合公共不动点的存在性和唯一性. 注意到如果$(X,\leq)$是一个偏序集合, 则可在乘积$X\times X$中定义以下偏序关系:

$$\forall(x,y),(u,v)\in X\times X,(x,y)\leq(u,v)\Leftrightarrow x\leq u,y\geq v.$$

定理3.2　在定理3.1的条件下, 如果对每一个(x,y), $(x^*,y^*)\in X\times X$, 都存在$(u,v)\in X\times X$, 满足$g(u)\leq g(v)$或者$g(v)\leq g(u)$, 使得$(G(u,v),G(v,u))\in X\times X$与$(G(x,y),G(y,x))$和$(G(x^*,y^*),G(y^*,x^*))$可比较, 则$G$和$g$有唯一的耦合公共不动点, 即存在唯一的$(x,y)\in X\times X$, 使得$x=g(x)=G(x,y)$, $y=g(y)=G(y,x)$.

证　由定理3.1, 耦合重合点构成的集合非空. 下证如果(x,y), (x^*,y^*)是映射G和g的两个耦合重合点, 即$g(x)=G(x,y)$, $g(y)=G(y,x)$和$g(x^*)=G(x^*,y^*)$且$g(y^*)=G(y^*,x^*)$, 则必有

$$g(x)=g(x^*),g(y)=g(y^*).$$

由假设存在$(u,v)\in X\times X$, 使得$(G(u,v),G(v,u))\in X\times X$与$(G(x,y),G(y,x))$和$(G(x^*,y^*),G(y^*,x^*))$是可比较的, 令$u_0=u$, $v_0=v$, 则存在$u_1,v_1\in X$, 使得$g(u_1)=G(u_0,v_0)$, $g(v_1)=G(v_0,u_0)$. 类似于定理3.1的证明, 可得到序列$\{g(u_n)\}$, $\{g(v_n)\}$, 满足

$$g(u_{n+1})=G(u_n,v_n),g(v_{n+1})=G(v_n,u_n).$$

同样地, 类似于定理3.1可证明$\{g(u_n)\}$, $\{g(v_n)\}$存在极限.

更进一步, 令$x_0=x$, $y_0=y$, $x_0^*=x^*$, $y_0^*=y^*$, 同样地, 可得到序列$\{g(x_n)\}$, $\{g(y_n)\}$, $\{g(x_n^*)\}$, $\{g(y_n^*)\}$满足

$$\begin{aligned}g(x_{n+1})&=G(x_n,y_n),g(y_{n+1})=G(y_n,x_n),\\ g(x_{n+1}^*)&=G(x_n^*,y_n^*),g(y_{n+1}^*)=G(y_n^*,x_n^*).\end{aligned}$$

因为

$$(G(x,y),G(y,x))=(g(x_1),g(y_1))=(g(x),g(y))$$

和

$$(G(u,v),G(v,u))=(g(u_1),g(v_1))$$

是可比较的, 不妨假设$g(x)\leq g(u_1)$, $g(y)\geq g(v_1)$(($g(x)\geq g(u_1),g(y)\leq g(v_1)$的情况证明类似). 容易得到$(g(x),g(y))$和$(g(u_n),g(v_n))$是可比较的, 即对任意的$n\geq 1$,

$$g(x)\leq g(u_n),g(y)\geq g(v_n).$$

由式(3.4), 对于任意的$n\geq 1$有

$$\begin{aligned}S^*_{g(x),g(x),g(u_{n+1})}(\phi(t))&=S^*_{G(x,y),G(x,y),G(u_n,v_n)}(\phi(t))\\ &\geq\min\left\{\begin{array}{c}S^*_{g(x),g(x),g(u_n)}(t),S^*_{g(x),g(x),G(x,y)}(t),\\ S^*_{g(u_n),g(u_n),G(u_n,v_n)}(t)\end{array}\right\}\\ &=\min\{S^*_{g(x),g(x),g(u_n)}(t),1,S^*_{g(u_n),g(u_n),g(u_{n+1})}(t)\}.\\ S^*_{g(y),g(y),g(v_{n+1})}(\phi(t))&=S^*_{G(y,x),G(y,x),G(v_n,u_n)}(\phi(t))\\ &\geq\min\left\{\begin{array}{c}S^*_{g(y),g(y),g(v_n)}(t),S^*_{g(y),g(y),G(y,x)}(t),\\ S^*_{g(v_n),g(v_n),G(v_n,u_n)}(t)\end{array}\right\}\\ &=\min\{S^*_{g(y),g(y),g(v_n)}(t),1,S^*_{g(v_n),g(v_n),g(v_{n+1})}(t)\}.\end{aligned}$$

令$n\to\infty$, 由定理2.2和引理2.6可得

$$\lim_{n\to\infty}g(u_{n+1})=g(x),\ \lim_{n\to\infty}g(v_{n+1})=g(y).$$

同理

$$\lim_{n\to\infty} g(u_{n+1}) = g(x^*),\ \lim_{n\to\infty} g(v_{n+1}) = g(y^*).$$

再由(PSM-2)有

$$S^*_{g(x),g(x),g(x^*)}(t) \geq \Delta\left(S^*_{g(x),g(x),g(u_{n+1})}\left(\frac{t}{3}\right), S^*_{g(x),g(x),g(u_{n+1})}\left(\frac{t}{3}\right), S^*_{g(x^*),g(x^*),g(u_{n+1})}\left(\frac{t}{3}\right)\right).$$

令$n\to\infty$, 则可得$S^*_{g(x),g(x),g(x^*)}(t)=1$, 所以$g(x)=g(x^*)$. 同理可证$g(y)=g(y^*)$.

因为$g(x)=G(x,y)$, $g(y)=G(y,x)$, G和g是可交换的, 所以

$$g(g(x)) = g(G(x,y)) = G(g(x),g(y)),$$
$$g(g(y)) = g(G(y,x)) = G(g(y),g(x)).$$

记$g(x)=z$, $g(y)=w$, 则可得$g(z)=G(z,w)$, $g(w)=G(w,z)$. 因此(z,w)是耦合重合点. 令$x^*=z$, $y^*=w$, 则有$g(z)=g(x)$, $g(y)=g(w)$, 即$g(z)=z$, $g(w)=w$. 于是$z=g(z)=G(z,w)$, $w=g(w)=G(w,z)$, 所以(z,w)是G和g的耦合公共不动点.

下证耦合公共不动点的唯一性.

假设(p,q)是另一对耦合公共不动点, 则有$p=g(p)=g(z)=z$, $q=g(q)=g(w)=w$. 因此G和g有唯一的耦合公共不动点.

在定理3.1中令$g=I$, 则可得推论3.1.

推论3.1 设$(X,\leq)$是一个偏序集合, (X,S^*,Δ)是一个完备的Menger PSM-空间, 其中$\Delta(a,b,c)=\min\{a,b,c\}$, $\forall a,b,c\in[0,1]$. 设$G: X\times X\to X$, $g: X\to X$, 映射G是混合g-单调的, 并且存在$\phi\in\varPhi_1$, 使得

$$S^*_{G(x,y),G(x,y),G(u,v)}(\phi(t)) \geq \min\left\{\begin{array}{c} S^*_{x,x,u}(t), S^*_{x,x,G(x,y)}(t), \\ S^*_{u,u,G(u,v)}(t) \end{array}\right\}.$$

$\forall x,y,u,v\in X$, $t>0$, $x\geq u$, $y\leq v$(或者$x\leq u$, $y\geq v$). 如果下列条件之一被满足:

(a) G是连续的;

(b) X有如下性质:

(i) 若$\{x_n\}$是一个不减序列且$x_n\to x(n\to\infty)$, 则$x_n\leq x$, $\forall n\in\mathbb{N}$;

(ii) 若$\{y_n\}$是一个不增序列且$y_n\to y(n\to\infty)$, 则$y\leq y_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

并且存在x_0, $y_0\in X$, 使得$x_0\leq G(x_0,y_0)$, $y_0\geq G(y_0,x_0)$, 则存在$x,y\in X$, 使得$x=G(x,y)$, $y=G(y,x)$, 即映射G和g有耦合重合点.

在定理3.1中令$\phi(t)=kt$, $k\in(0,1)$, 则可得推论3.2.

推论3.2 设$(X,\leq)$是一个偏序集合, (X,S^*,Δ)是一个完备的Menger PSM-空间, 其中$\Delta(a,b,c)=\min\{a,b,c\}$, $\forall a,b,c\in[0,1]$. 设$G: X\times X\to X$, $g: X\to X$, 映射G是混合g-单调的, 并且存在$\phi\in\varPhi_1$使得

$$S^*_{G(x,y),G(x,y),G(u,v)}(kt) \geq \min\left\{\begin{array}{c} S^*_{g(x),g(x),g(u)}(t), S^*_{g(x),g(x),G(x,y)}(t), \\ S^*_{g(u),g(u),G(u,v)}(t) \end{array}\right\}.$$

$\forall x,y,u,v\in X$, $t>0$, $g(x\geq g(u)$, $g(y)\leq g(v)$或者$g(x)\leq g(u)$, $g(y)\geq g(v)$. 假设$G(X\times X)\subseteq g(X)$, g是连续的, 并且和G是可交换的. 如果下列条件之一被满足:

(a) G是连续的;

(b) X有如下性质:

(i) 若$\{x_n\}$是一个不减序列且$x_n\to x(n\to\infty)$, 则$x_n\leq x$, $\forall n\in\mathbb{N}$;

(ii) 若$\{y_n\}$是一个不增序列且$y_n\to y(n\to\infty)$, 则$y\leq y_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

并且存在x_0, $y_0\in X$, 使得$g(x_0)\leq G(x_0,y_0)$, $g(y_0)\geq G(y_0,x_0)$, 则存在$x,y\in X$, 使得$g(x)=G(x,y)$, $g(y)=G(y,x)$, 即映射G和g有耦合重合点.

类似地, 在定理3.2中令$g = I$或$\phi(t) = kt$, 可得相应推论, 限于篇幅省略.

4. 应用

例4.1　设$X = [0,1]$, $S(x,y,z) = |x-z|+|y-z|$, $S^*_{x,y,z}(t) = H(t-S(x,y,z))$, $\Delta(a,b,c) = \min\{a,b,c\}$, $\forall a,b,c \in [0,1]$, 则(X, S^*, Δ)是一个完备的Menger PSM-空间. 定义$g : X \to X$和$G : X \times X \to X$如下:

$$g(x) = \frac{x}{2}, \forall x \in X, G(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{6}, & x,y \in [0,1], x \geq y, \\ 0, & x < y. \end{cases}$$

显然G是混合g-单调的, $G(X \times X) \subseteq g(X)$, g是连续的, 且与G是可交换的, G也是连续的. 令$\phi(t) = \frac{2}{3}t$, $\forall t \in [0,\infty)$. 令$x_0 = 0$和$y_0 = c$是X中的两个点, 则

$$g(x_0) = g(0) = G(0,c) = G(x_0,y_0), g(y_0) = g(c) = \frac{c}{2} \geq \frac{c}{6} = G(c,0) = G(x_0,y_0).$$

下证G, g, ϕ满足式(3.4). 取$x,y,u,v \in X$, 满足$g(x) \geq g(u)$, $g(y) \leq g(v)$, 即$x \geq u$, $y \leq v$. 因此式(3.4)变成如下形式:

$$H\left(\frac{2}{3}t - 2|G(x,y)-G(u,v)|\right) \geq \min\left\{ \begin{array}{c} H\left(t-2\left|\frac{x-u}{2}\right|\right), H\left(t-2\left|\frac{x}{2}-G(x,y)\right|\right) \\ H\left(t-2\left|\frac{u}{2}-G(u,v)\right|\right) \end{array} \right\}.$$

由H的定义, 只需证明当$t > x-u$, $t > 2|\frac{x}{2}-G(x,y)|$, $t > 2\left|\frac{u}{2}-G(u,v)\right|$时, 有

$$\frac{2}{3}t > 2|G(x,y)-G(u,v)|.$$

下分4种情形讨论.

情形1　$x \geq y$, $u \geq v$, 即$y \leq v \leq u \leq x$, 此时

$$t > x-u, t > 2|\frac{x}{2}-G(x,y)| = 2\left(\frac{x}{2}-\frac{x-y}{6}\right) = \frac{2x+y}{3},$$

$$t > 2|\frac{u}{2}-G(u,v)| = 2\left(\frac{u}{2}-\frac{u-v}{6}\right) = \frac{2u+v}{3}.$$

则可得$t > \frac{2x+y}{3} \geq \frac{x}{2}$, 于是

$$t > \frac{x}{2} \geq \frac{x}{2} - \frac{u-v}{2} = \frac{x-u}{2} + \frac{v}{2} \geq \frac{x-u}{2} + \frac{v-y}{2} = \frac{x-y}{2} - \frac{u-v}{2},$$

即$\frac{2}{3}t \geq \frac{x-y}{3} - \frac{u-v}{3} = 2|G(x,y)-G(u,v)|$.

情形2　$x \geq y$, $u < v$, 则$G(u,v) = 0$, 此时

$$t > x-u, t > 2\left|\frac{x}{2}-G(x,y)\right| = 2\left(\frac{x}{2}-\frac{x-y}{6}\right) = \frac{2x+y}{3}, t > 2\left|\frac{u}{2}-G(u,v)\right| = u.$$

则可得$t > \frac{2x+y}{3} \geq \frac{x}{2} \geq \frac{x-y}{2}$, 即$\frac{2}{3}t \geq \frac{x-y}{3} = 2|G(x,y)-G(u,v)|$.

情形3　$x < y$, $u \geq v$, 因为$x \geq u$, $y \leq v$, 所以这种情况不可能发生.

情形4　$x < y$, $u < v$, 则$G(x,y) = G(u,v) = 0$, 此时

$$t > x-u, t > 2\left|\frac{x}{2}-G(x,y)\right| = x, t > 2\left|\frac{u}{2}-G(u,v)\right| = u.$$

因为$t > 0$, 所以$\frac{2}{3}t > 0 = 2|G(x,y)-G(u,v)|$.

因此G, g, ϕ满足式(3.4). 事实上, $(0,0)$是G和g在X中的耦合重合点.

参考文献:

[1] MENGER K. Statistical metrics[J]. Proc. Natl. Acad. Sci. USA., 1942, 28: 535-537.

[2] SCHWEIZER B, SKLAR A. Statistical metric spaces[J]. Pacific J. Math., 1960, 10: 313-344.

[3] SCHWEIZER B, SKLAR A, THORP E. The metrization of statustical metric spaces[J]. Pacific J. Math., 1960, 10: 673-675.

[4] CHANG S S, CHO Y J, KANG S M. Probabilistic Metric Spaces and Nonlinear Operator Theory[M]. Chengdu: Sichuan University Press, 1994.

[5] MUSTAFA Z, SIMS B. A new approach to a generalized metric spaces[J]. Nonlinear Convex Anal., 2006, 7(2): 289-297.

[6] SEDGHI S, RAO K P R, SHOBE N. Common fixed point theorems for six weakly compatible mapping in D^*-Metric spaces[J]. Int. J. Math. Sci., 2007, 6(2): 225-237.

[7] DHAGE B C. Generalized metric spaces and mapping with fixed point[J]. Bull. Calcutta Math. Soc., 1992, 84(2): 329-336.

[8] SEDGHI S, SHOBE N, ALIOUCHEA A. A generalization of fixed point theorem in S-metric spaces[J]. Mat. Vesnik., 2012, 64(3): 258-266.

[9] ZHOU C, WANG S, ĆIRIĆ L, et al. Generalized probabilistic metric spaces and fixed point theorem[J]. Fixed Point Theory and Appl., 2014, 2014(91): 1-15.

[10] ZHU C X, TU Q, WU Z Q. Common fixed point theorems for three pairs of self-mapping satisfying the common $(E.A)$ property in Menger probabilistic G-metric spaces[J]. Fixed Point Theory Appl., 2015, 2015(131): 1-14.

[11] ZHU C X, TU Q, WU Z Q. Common fixed point theorems for probabilistic ϕ-contraction in Menger PGM-spaces [J]. The Journal of Nonlinear Science and Application., 2016, 9: 5143-5156.

[12] HASANVAND F, KHANGIR M. Some fixed point theorems in Menger PbM-spaces with a application[J]. Fixed Point Theory and Application., 2015, 2015: 81.

[13] HADŽIĆ O, PAP E. Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[14] BHASKAR T G, LAKSHMIRKANTHAM V. Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications[J]. Nonlinear Anal., 2006, 65(7): 1379-1393.

[15] LAKSHMIRKANTHAM V, ĆIRIĆ L B. Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces[J]. Nonlinear Anal., 2009, 70(12): 4341-4349.

Some Coupled Coincidence Point Theorems in Partially Ordered Menger PSM-Space

HU Pin, GU Feng

(*College of Science, Hangzhou Normal University, Hangzhou 311121, China*)

Abstract: In this paper, we introduce a new concept of metric space, which is called Menger probabilistic S-metric space and investigate some property. On the basis of mixed g-monotone mapping, some coupled coincidence and coupled common fixed point theorems and corollaries are proved under ϕ-contractive condition for self-maps in partially ordered Menger PSM-Space. Meantime, a specific example is provided to support the new result.

Key words: Menger PSM-space; Partially ordered set; Coupled coincidence point; Coupled common fixed point; Mixed g-monotone mapping