

无源对流扩散方程的两类修正差分格式

王彩华, 杜金月, 张静

(天津师范大学数学科学学院, 天津 300387)

摘要: 本文研究含参数 ε 的无源对流扩散问题的有限差分格式. 首先在三点模板上将两边结点处的函数值关于中心点进行泰勒展开, 反复利用原微分方程, 通过“降阶”的思想将两个泰勒展开式中的高阶导数项化为只含一阶导数的展式, 联立展式消去一阶导数项从而得到形式上精确的差分格式. 由于形式上精确的差分格式的系数含无穷项, 如何保留有限项使得差分格式分别适用于求解参数较大或参数较小的对流扩散问题是本文研究的重点, 为此本文分情形设计了两类差分格式: 当参数较大时, 因 h 的幂次对差分格式系数影响更大, 本文设计出“横向系列修正差分格式(HDS)”, 其精度分别可达到二阶、四阶、六阶、八阶; 而对小参数问题, 相对于步长, $1/\varepsilon$ 的幂次对差分格式的系数影响更大, 据此本文设计出“纵向系列修正差分格式(VDS)”. 数值算例将横向、纵向系列格式与七种参考文献给出的差分格式进行了数值比对, 验证了本文设计的横向差分格式(HDS)适用于求解 ε 较大时的对流扩散问题, 而纵向系列修正差分格式(VDS)适用于求解 ε 较小时的问题, 且数值解精度较参考格式更高.

关键词: 对流扩散方程; 小参数; 差分格式; 泰勒展式

中图分类号: O241.82

AMS(2000)主题分类: 65L12; 65N06

文献标识码: A

文章编号: 201908026(2020)03-0757-13

1. 引言

对流扩散方程常出现在流体力学、弹性力学、空气动力学、等离子体动力学、磁流体动力学、海洋学等流体运动领域^[1], 在科学工程上有着重要的应用. 当对流占优时, 问题的解往往会呈现小边界层, 传统数值方法求解精度较差^[2,11]. 本文研究适宜求解含参数无源对流扩散方程的有限差分方法, 数学模型如下:

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) + A(x)u'(x) = 0, x \in I = (a, b), \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $0 < \varepsilon \leq 1$ 为扩散系数(常数), $A(x)$ 为对流项系数, 在区间 $\bar{I} = [a, b]$ 上充分光滑, α, β 是常数. 当 ε 较小时, 对流扩散方程的解常常会出现边界层, 且 $A(x) > 0$ 时边界层位于右端 $x = b$ 附近, $A(x) < 0$ 时边界层位于左端 $x = a$ 附近. 本文为讨论方便, 设 $A(x) \geq A_{\min} > 0$ (本文的差分格式对 $A(x) < 0$ 同样适用).

将区间 $\bar{I} = [a, b]$ 进行 N 等分: $a = x_0, x_1, \dots, x_N = b$, 网格步长记为 $h = (b - a) / N$. 网格结点集 $\bar{I}_h = \{x_i = a + ih \mid i = 0, 1, \dots, N\}$, 其中内结点集 $\overset{\circ}{I}_h = \{x_i \mid i = 1, 2, \dots, N - 1\}$, 边

*收稿日期: 2019-08-28

基金项目: 国家自然科学基金(11871372, 11501413), 天津市高等学校创新团队培养计划(TD13-5078)

作者简介: 王彩华, 女, 汉族, 天津人, 副教授, 研究方向: 偏微分方程数值解.

界点集 $\Gamma = \Gamma_h = \{x_0, x_N\}$. 记结点集对应的下标集 $\omega = \{i | i = 1, 2, \dots, N-1\}$, $\gamma = \{0, N\}$, $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma = \{i | i = 0, 1, \dots, N\}$.

本文中 $u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_N)$ 为方程(1.1)在剖分结点处的精确值, 简写为 u_0, u_1, \dots, u_N . U_0, U_1, \dots, U_N 为数值方法在结点处的近似值. $A(x_i)$ 简记为 A_i , 记 $Pe(x) = A(x)h/\varepsilon$, $Pe_i = A_i h/\varepsilon (i = 1, 2, \dots, N-1)$, $\mu = \max_{1 \leq i \leq N-1} |Pe_i| > 0$.

因本文在数值实验部分选取了多种差分格式进行了综合数值比对, 这里先将相关参考文献中的差分格式(简记为FD1, FD2, ..., FD7)及实验结果简介如下.

基于模型方程(1.1), 文[3]首先给出一种差分格式FD1, 该格式具有二阶精度和无条件稳定收敛性, 能够突破中心差分格式 $\mu \leq 2$ 的限制, 实验表明此格式适合数值求解参数 ε 较大的对流扩散问题, 但当 ε 减小时FD1数值精度下降. 根据对流扩散过程的迎风效应, 文[3]继续将FD1修改成具有二阶精度、无条件收敛的差分格式FD2; 进一步地, 文[3]在FD2基础上通过摄动处理, 建立了具有四阶精度的差分格式FD3. 实验表明差分格式FD2, FD3适合求解 ε 较小的问题, 但当网格过密部分结点位于边界层附近时数值解精度变差.

Dennis等人提出了四阶差分格式FD4^[4], 但数值实验表明仅当 ε 较大时数值精度较好. 陈国谦在二阶指数型的 $\Pi'in$ ^[6]格式基础上, 通过对系数进行二阶摄动修正, 得到新的差分格式FD5^[5], 此差分格式具有四阶精度, 针对无源对流扩散问题数值计算效果较好. 但文[7]指出FD5求解含源问题时数值精度下降.

文[7]通过对微分方程系数常数化处理与余项修正的思想, 给出变系数的对流扩散方程的四阶指数型差分格式FD6^[7], FD6与FD5针对无源问题数值计算效果相当, FD6亦适宜于求解含源问题.

文[8]给出具有四阶精度的FOC差分格式, 但此格式色散误差和耗散误差较大. 基于截断误差余项修正思想, 文[9]在FOC基础上给出一种有理型的四阶紧致差分格式FD7^[9], 实验结果表明该差分格式在 ε 较大时计算效果较好, 却不适应小参数问题.

综上所述, 有些参考文献所给出的差分格式适合求解参数 ε 较大时的对流扩散问题, 而有些格式适合求解参数 ε 较小时的问题. 本文考虑能否在设计差分格式时即可根据 ε 的大小灵活选择合适的差分格式, 且数值计算精度更高, 为此设计了两类差分格式: 一类是横向系列差分格式, 适用于求解 ε 较大时的对流扩散问题, 通过修正方法可使得该系列格式达到二阶、四阶、六阶、八阶数值精度, 且第5节实验表明当参数较大时本文的高阶差分格式数值精度优于各种参考差分格式; 另一类是纵向系列格式, 适用于求解 ε 较小时的对流扩散问题, 实验表明随着参数 ε 的减小, 横向系列格式数值计算精度逐渐变差, 而纵向系列格式数值精度逐渐提高, 且亦优于参考格式.

本文将横向系列修正差分格式简记为HDS1(同中心差分格式CDS), HDS2, HDS3, HDS4等(HDS: Horizontal Difference Scheme); 将纵向修正的系列差分格式简记为VDS1(同 $\Pi'in$ 格式), VDS2, VDS3等(VDS: Vertical Difference Scheme).

2. 横向与纵向系列修正差分格式的设计思路

设函数 $u(x)$ 充分光滑, 当 $i = 1, 2, \dots, N-1$ 时, 将 u_{i+1} 、 u_{i-1} 在点 x_i 处进行Taylor展开

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + u'(x_i)h + \frac{u''(x_i)h^2}{2!} + \frac{u^{(3)}(x_i)h^3}{3!} + \dots, \quad (2.1)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - u'(x_i)h + \frac{u''(x_i)h^2}{2!} - \frac{u^{(3)}(x_i)h^3}{3!} + \dots, \quad (2.2)$$

其中 $u^{(k)}(x_i) = \frac{d^k u(x)}{dx^k} \Big|_{x=x_i} (k = 0, 1, 2, \dots)$.

由方程(1.1)知 $u''(x) = \frac{A(x)}{\varepsilon} u'(x)$, 反复利用此式, 可对函数 $u(x)$ 的高阶导数降阶. 事实上

如设

$$u^{(n)}(x) = q_n(x)u'(x), \quad (2.3)$$

显然 $q_1(x) = 1$. 对上式两边求导, 有

$$u^{(n+1)}(x) = q'_n(x)u'(x) + q_n(x)u''(x) = \left(\frac{A(x)}{\varepsilon}q_n(x) + q'_n(x)\right)u'(x), \quad (2.4)$$

得到递推公式

$$q_{n+1}(x) = \frac{A(x)}{\varepsilon}q_n(x) + q'_n(x), \quad (2.5)$$

依据上面递推公式, 可列出 $u(x)$ 的高阶导数降阶组式如下

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(x) = q_2(x)u'(x) = \frac{A(x)}{\varepsilon}u'(x), \\ u^{(3)}(x) = q_3(x)u'(x) = \left(\frac{A(x)^2}{\varepsilon^2} + \frac{A'(x)}{\varepsilon}\right)u'(x), \\ u^{(4)}(x) = q_4(x)u'(x) = \left(\frac{A(x)^3}{\varepsilon^3} + 3\frac{A(x)A'(x)}{\varepsilon^2} + \frac{A''(x)}{\varepsilon}\right)u'(x), \\ u^{(5)}(x) = q_5(x)u'(x) = \left(\frac{A(x)^4}{\varepsilon^4} + 6\frac{A(x)^2A'(x)}{\varepsilon^3} + 3\frac{(A'(x))^2}{\varepsilon^2} + 4\frac{A(x)A''(x)}{\varepsilon^2} + \frac{A^{(3)}(x)}{\varepsilon}\right)u'(x), \\ u^{(6)}(x) = q_6(x)u'(x) = \left(\frac{A(x)^5}{\varepsilon^5} + 10\frac{A(x)^3A'(x)}{\varepsilon^4} + 15\frac{A(x)A'(x)^2}{\varepsilon^3} + 10\frac{A(x)^2A''(x)}{\varepsilon^3} \right. \\ \left. + 5\frac{A(x)A^{(3)}(x)}{\varepsilon^2} + 10\frac{A'(x)A''(x)}{\varepsilon^2} + \frac{A^{(4)}(x)}{\varepsilon}\right)u'(x), \\ \dots \end{array} \right. \quad (2.6)$$

横向系列差分格式的设计思路: 当 ε 较大时(例如为1时), 将上面降阶组式(2.6)代入泰勒展式(2.1),(2.2), 可见, (2.1),(2.2)中 h 幂次保留几项将对数值精度影响较大. 如式(2.1),(2.2)只保留到 $u''(x)$ 项, 且将组式(2.6)的 $u''(x) = \frac{A(x)}{\varepsilon}u'(x)$ 的表达式代入到式(2.1),(2.2), 两式联立消去 $u'(x)$ 即可得到二阶差分格式HDS1(同经典的中心差分格式CDS); 在HDS1基础上继续修正, (2.1),(2.2)保留到 $u^{(3)}(x), u^{(4)}(x)$, 组式(2.6)相应的降阶式子代入式(2.1),(2.2), 消去 $u'(x)$, 则得到四阶差分格式HDS2; 继续修正, 展式(2.1),(2.2)保留到 $u^{(5)}(x), u^{(6)}(x)$ 可得到六阶差分格式HDS3; 展式(2.1),(2.2)保留到 $u^{(7)}(x), u^{(8)}(x)$, 可得到八阶差分格式HDS4. 这一过程可以继续下去, 本文仅详细给出了HDS1-HDS4的差分格式.

纵向系列差分格式是在文[13]基础上的改进, 设计思路为: 当 ε 较小时($\varepsilon \ll 1$), 由降阶组式(2.6)可见 ε 的负指数幂次如何保留对数值格式精度影响远超过 h 的作用, 此时上面的横向差分格式设计不适宜求解小参数问题, 本文设计了纵向差分格式. 如组式(2.6)仅保留纵向第一列关于 $1/\varepsilon$ 指数幂次最大的项, 舍去其他项, 将其代入(2.1),(2.2), 得到的关于 $u'(x)$ 的系数是收敛级数, 联立(2.1),(2.2)消去 $u'(x)$ 即得到的纵向差分格式VDS1(同Il'in格式); 在VDS1基础上继续修正, 保留 $1/\varepsilon$ 指数幂次下一项即次大的项, 整理可得差分格式VDS2; 同理进一步修正可得VDS3. 这一过程可以继续下去, 本文仅给出了VDS1-VDS3的差分格式. 在纵向系列差分格式设计中, 组式(2.6)中因为对 $u''(x), u^{(3)}(x) \dots$ 都取了部分项作为近似代入(2.1),(2.2), 这与常见差分格式构造思路不同, 不能也不必进行关于 h 的截断误差分析.

接下来具体给出横向系列差分格式与纵向系列差分格式.

3. 横向系列修正差分格式

为简便记 $u^{(k)}(x_i)$ 为 $u_i^{(k)}$, 联立式(2.1)和(2.2), 且由降阶组式(2.6)可知, 当 $i = 1, 2, \dots, N-1$ 时

$$\begin{aligned} u'_i &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \left(\frac{u_i^{(3)}h^2}{3!} + \frac{u_i^{(5)}h^4}{5!} + \dots\right) \\ &= \delta_x u_i - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_i^{(2k+1)}h^{2k}}{(2k+1)!} = \delta_x u_i - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_{2k+1}(x_i)h^{2k}}{(2k+1)!} u'_i, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} u_i'' &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - 2 \left(\frac{u_i^{(4)} h^2}{4!} + \frac{u_i^{(6)} h^4}{6!} + \dots \right) \\ &= \delta_x^2 u_i - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_i^{(2k+2)} h^{2k}}{(2k+2)!} = \delta_x^2 u_i - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_{2k+2}(x_i) h^{2k}}{(2k+2)!} u_i', \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中一阶和二阶差分算子

$$\delta_x u_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad \delta_x^2 u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}.$$

当 ε 不是很小(如 $\varepsilon = 1$)时, 式(3.1)、(3.2)右侧的无穷级数中如果取有限项近似 u_i' , u_i'' , 并将降阶组式(2.6)相应地代入(3.1)、(3.2), 即可得到一系列横向差分格式, 其截断误差阶随着级数中保留的项增多而增大. 特别地, 如果式(3.1)、(3.2)右侧仅取 $\delta_x u_i$, $\delta_x^2 u_i$ 近似 u_i' , u_i'' , 得到的差分格式HDS1即是经典的中心差分格式(CDS). 如果(3.1)、(3.2)中保留级数中 $k = 1, 2, \dots, m$ 的项, 即截断 $k > m$ 以后的项, 整理后得到的一系列修正差分格式记作HDS2, HDS3, HDS4等.

I 横向差分格式HDS1(同中心差分格式CDS)

由带Lagrange余项的Taylor展式知式(3.1)与式(3.2)可写成如下式子

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \frac{u^{(3)}(\xi_{i1}) h^2}{6} = \delta_x u_i - \frac{u^{(3)}(\xi_{i1}) h^2}{6}, \quad (3.3)$$

$$u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - 2 \frac{u^{(4)}(\xi_{i2}) h^2}{4!} = \delta_x^2 u_i - \frac{u^{(4)}(\xi_{i2}) h^2}{12}, \quad (3.4)$$

其中 $\xi_{i1}, \xi_{i2} \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

将式(3.3)、(3.4)代入到式(1.1)中, 并整理得

$$L_h^I u_i = -\varepsilon \delta_x^2 u_i + A_i \delta_x u_i = R_i^I \quad (3.5)$$

其中

$$R_i^I = -\varepsilon \frac{u^{(4)}(\xi_{i2}) h^2}{12} + A_i \frac{u^{(3)}(\xi_{i1}) h^2}{6},$$

忽略(3.5)式右端小量, 即去掉截断误差项, 并用近似解 U_i 代替 u_i , 可得差分格式

$$\begin{cases} L_h^I U_i = -\varepsilon \delta_x^2 U_i + A_i \delta_x U_i = 0, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ U_0 = \alpha, & U_N = \beta. \end{cases} \quad (3.6)$$

这就是我们所熟知的二阶中心差分格式.

记区间 $[a, b]$ 上任意连续的函数为 $v(x)$, \bar{I}_h 上的网格函数为 $V = \{V_i | i \in \bar{\omega}\}$, 定义范数

$$\|v\|_{[c,d],\infty} = \max_{c \leq x \leq d} |v(x)|, \quad \|V\|_{\bar{I}_h,\infty} = \max_{i \in \bar{\omega}} |V_i|, \quad \|V\|_{\bar{I}_h,\infty}^\circ = \max_{i \in \omega} |V_i|,$$

$\|v\|_{[a,b],\infty}$ 简记为 $\|v\|_\infty$.

定理3.1 设 U_i 是差分格式(3.6)的解, u_i 是微分方程(1.1)的解在结点处的精确值, $Pe_i = A_i h / \varepsilon (i = 1, 2, \dots, N-1)$, 当 $\mu = \max_{1 \leq i \leq N-1} |Pe_i| < 2$ 时, 有

$$\|U_i - u_i\|_{\bar{I}_h,\infty} \leq \left(\frac{\varepsilon}{12} \|u^{(4)}(x)\|_\infty + \frac{1}{6} \|A(x)u^{(3)}(x)\|_\infty \right) h^2. \quad (3.7)$$

参考文[12]应用极值原理该定理易证, 限于篇幅, 证明过程这里省略.

注3.1 对于定理3.1, 把组式(2.6)中关于 $u^{(3)}(x)$, $u^{(4)}(x)$ 的相应降阶式代入(3.7), 有

$$\|U_i - u_i\|_{\bar{I}_h,\infty} \leq C_1 \|u'\|_\infty \frac{h^2}{\varepsilon^2}, \quad (3.8)$$

其中

$$C_1 = \frac{b-a}{12A_{\min}} (\|A^3 + 3\varepsilon AA' + \varepsilon^2 A''\|_\infty + 2\|A^3 + \varepsilon AA'\|_\infty).$$

可见当 ε 不是非常小时(如 $\varepsilon = 1$)中心差分格式有二阶精度; 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 有 $C_1 \rightarrow \frac{(b-a)}{4A_{\min}} \|A^3\|_{\infty}$. 但由于奇异扰动问题的解 $\|u'\|_{\infty}$ 一般随着参数 ε 减小而增大, 且 $\frac{h^2}{\varepsilon^2}$ 很大, 从误差估计式(3.8)可见CDS不适合于求解参数 ε 非常小的对流扩散问题.

II 差分格式HDS2

观察式(3.1),(3.2), 由带Lagrange余项的Taylor展式知

$$u'_i = \delta_x u_i - \frac{q_3(x_i) u'_i}{6} h^2 - \frac{q_5(\xi_{i3}) u'_i(\xi_{i3})}{120} h^4, \quad (3.9)$$

$$u''_i = \delta_x^2 u_i - \frac{q_4(x_i) u'_i}{12} h^2 - \frac{q_6(\xi_{i4}) u'_i(\xi_{i4})}{360} h^4, \quad (3.10)$$

其中 $\xi_{i3}, \xi_{i4} \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

式(3.9)整理可得

$$u'_i = \frac{6\delta_x u_i}{6 + q_3(x_i) h^2} - \frac{q_5(\xi_{i3}) u'(\xi_{i3})}{20(6 + q_3(x_i) h^2)} h^4. \quad (3.11)$$

记一阶导数的四阶差分算子为

$$H_x^{II} u_i = \frac{6\delta_x u_i}{6 + q_3(x_i) h^2}. \quad (3.12)$$

将式(3.11)代入式(3.10), 并整理得

$$u''_i = \delta_x^2 u_i - \frac{q_4(x_i) h^2}{12} H_x^{II} u_i + \left(\frac{q_5(\xi_{i3}) q_4(x_i) u'(\xi_{i3}) h^2}{1440 + 240q_3(x_i) h^2} - \frac{q_6(\xi_{i4}) u'(\xi_{i4})}{360} \right) h^4. \quad (3.13)$$

记二阶导数的四阶差分算子

$$H_{xx}^{II} u_i = \delta_x^2 u_i - \frac{q_4(x_i) h^2}{12} H_x^{II} u_i. \quad (3.14)$$

将式(3.11),(3.13)代入到式(1.1)中, 并整理, 得

$$L_h^{II} u_i = -\varepsilon H_{xx}^{II} u_i + A_i H_x^{II} u_i = R_i^{II}, \quad (3.15)$$

其中

$$R_i^{II} = \varepsilon \left(\frac{q_5(\xi_{i3}) q_4(x_i) u'(\xi_{i3}) h^2}{1440 + 240q_3(x_i) h^2} - \frac{q_6(\xi_{i4}) u'(\xi_{i4})}{360} \right) h^4 + A_i \frac{q_5(\xi_{i3}) u'(\xi_{i3})}{120 + 20q_3(x_i) h^2} h^4. \quad (3.16)$$

忽略(3.15)右端四阶小量, 并用近似解 U_i 代替上式的 u_i , 可得四阶差分格式HDS2

$$\begin{cases} L_h^{II} U_i = -\varepsilon H_{xx}^{II} U_i + A_i H_x^{II} U_i = 0, & i = 1, 2, \dots, N, \\ U_0 = \alpha, & U_N = \beta. \end{cases} \quad (3.17)$$

把上面的差分格式写成三点式, 即(3.17)的第一个式子可写为

$$L_h^{II} U_i = -P_i U_{i-1} + \frac{2\varepsilon}{h^2} U_i - Q_i U_{i+1} = g_i, \quad (3.18)$$

其中

$$P_i = \frac{\varepsilon}{h^2} + \eta_i \frac{A_i}{2h}, \quad (3.19)$$

$$Q_i = \frac{\varepsilon}{h^2} - \eta_i \frac{A_i}{2h}, \quad (3.20)$$

$$\eta_i = \frac{12A_i + h^2 \varepsilon q_4(x_i)}{12A_i + 2h^2 A_i q_3(x_i)}, \quad (3.21)$$

如取 $\eta_i = 1$ 时, HDS2格式则成为中心差分格式. 当HDS2格式满足极值原理时, 达到四阶精度.

III 横向差分格式HDS3

式(3.1), (3.2)Taylor展式如果比HDS2格式多保留一项, 即取

$$u'_i = \delta_x u_i - \frac{q_3(x_i) u'_i}{6} h^2 - \frac{q_5(x_i) u'_i}{120} h^4 - \frac{q_7(\xi_{i5}) u'(\xi_{i5})}{5040} h^6, \quad (3.22)$$

$$u_i'' = \delta_x^2 u_i - \frac{q_4(x_i) u_i'}{12} h^2 - \frac{q_6(x_i) u_i'}{360} h^4 - \frac{q_8(\xi_{i6}) u'(\xi_{i6})}{20160} h^6, \quad (3.23)$$

其中 $\xi_{i5}, \xi_{i6} \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

由(3.22)整理可得

$$u_i' = H_x^{III} u_i - \frac{q_7(\xi_{i5}) u'(\xi_{i5})}{42(q_5(x_i) h^4 + 20q_3(x_i) h^2 + 120)} h^6, \quad (3.24)$$

其中一阶导数的六阶差分算子

$$H_x^{III} u_i = \frac{120 \delta_x u_i}{q_5(x_i) h^4 + 20q_3(x_i) h^2 + 120}. \quad (3.25)$$

同样由(3.23)推导可得

$$u_i'' = H_{xx}^{III} u_i + \left(\left(\frac{q_4(x_i) h^2}{12} + \frac{q_6(x_i) h^4}{360} \right) \frac{q_7(\xi_{i5}) u'(\xi_{i5})}{42(q_5(x_i) h^4 + 20q_3(x_i) h^2 + 120)} - \frac{q_8(\xi_{i6}) u'(\xi_{i6})}{20160} \right) h^6, \quad (3.26)$$

其中二阶导数的六阶差分算子

$$H_{xx}^{III} u_i = \delta_x^2 u_i - \left(\frac{q_4(x_i) h^2}{12} + \frac{q_6(x_i) h^4}{360} \right) H_x^{III} u_i. \quad (3.27)$$

将式(3.24), (3.26)代入到式(1.1), 并整理得

$$-\varepsilon H_{xx}^{III} u_i + A_i H_x^{III} u_i = R_i^{III}, \quad (3.28)$$

其中

$$R_i^{III} = \varepsilon \left(\left(\frac{q_4(x_i) h^2}{12} + \frac{q_6(x_i) h^4}{360} \right) \frac{q_7(\xi_{i5}) u'(\xi_{i5})}{42(q_5(x_i) h^4 + 20q_3(x_i) h^2 + 120)} - \frac{q_8(\xi_{i6}) u'(\xi_{i6})}{20160} \right) h^6 + A_i \frac{q_7(\xi_{i5}) u'(\xi_{i5})}{42(q_5(x_i) h^4 + 20q_3(x_i) h^2 + 120)} h^6. \quad (3.29)$$

忽略六阶小量, 并用近似解 U_i 代替上式的 u_i , 可得六阶差分格式HDS3

$$\begin{cases} L_h^{III} U_i = -\varepsilon H_{xx}^{III} U_i + A_i H_x^{III} U_i = 0, i = 1, 2, \dots, N-1, \\ U_0 = \alpha, U_N = \beta. \end{cases} \quad (3.30)$$

IV 横向差分格式HDS4

保留式(3.1),(3.2)中级数的前三项, 由拉格朗日余项知

$$u_i' = \delta_x u_i - \frac{q_3(x_i) u_i'}{6} h^2 - \frac{q_5(x_i) u_i'}{120} h^4 - \frac{q_7(x_i) h^6 u_i'}{5040} - \frac{q_9(\xi_{i7}) h^8 u'(\xi_{i7})}{362880}, \quad (3.31)$$

$$u_i'' = \delta_x^2 u_i - \frac{q_4(x_i) u_i'}{12} h^2 - \frac{q_6(x_i) u_i'}{360} h^4 - \frac{q_8(x_i) u_i'}{40320} h^6 - \frac{q_{10}(\xi_{i8}) u'(\xi_{i8})}{1814400} h^8, \quad (3.32)$$

其中 $\xi_{i7}, \xi_{i8} \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

同前面格式推导过程一样地, 整理式(3.31)可得

$$u_i' = H_x^{IV} u_i - \frac{q_9(\xi_{i7}) u'(\xi_{i7})}{72(q_7(x_i) h^6 + 42q_5(x_i) h^4 + 840q_3(x_i) h^2 + 5040)} h^8, \quad (3.33)$$

其中一阶导数的八阶差分算子为

$$H_x^{IV} u_i = \frac{5040 \delta_x u_i}{q_7(x_i) h^6 + 42q_5(x_i) h^4 + 840q_3(x_i) h^2 + 5040}. \quad (3.34)$$

将式(3.33)代入(3.32), 并记二阶导数的八阶差分算子为

$$H_{xx}^{IV} u_i = \delta_x^2 u_i - \left(\frac{q_4(x_i) h^2}{12} + \frac{q_6(x_i) h^4}{360} + \frac{q_8(x_i) h^6}{40320} \right) H_x^{IV} u_i. \quad (3.35)$$

可得

$$u_i'' = H_{xx}^{IV} u_i + \left(\left(\frac{q_4(x_i)h^2}{12} + \frac{q_6(x_i)h^4}{360} + \frac{q_8(x_i)h^6}{40320} \right) \frac{q_9(\xi_{i7})u'(\xi_{i7})}{72(q_7(x_i)h^6 + 42q_5(x_i)h^4 + 840q_3(x_i)h^2 + 5040)} - \frac{q_{10}(\xi_{i8})u'(\xi_{i8})}{1814400} \right) h^8. \quad (3.36)$$

将式(3.33), (3.36)代入到式(1.1)中, 整理得

$$-\varepsilon H_{xx}^{IV} u_i + A_i H_x^{IV} u_i = R_i^{IV}, \quad (3.37)$$

其中

$$R_i^{IV} = \varepsilon \left(\left(\frac{q_4(x_i)h^2}{12} + \frac{q_6(x_i)h^4}{360} + \frac{q_8(x_i)h^6}{40320} \right) \frac{q_9(\xi_{i7})u'(\xi_{i7})}{72(q_7(x_i)h^6 + 42q_5(x_i)h^4 + 840q_3(x_i)h^2 + 5040)} - \frac{q_{10}(\xi_{i8})u'(\xi_{i8})}{1814400} \right) h^8 + A_i \frac{q_9(\xi_{i7})u'(\xi_{i7})}{72(q_7(x_i)h^6 + 42q_5(x_i)h^4 + 840q_3(x_i)h^2 + 5040)} h^8. \quad (3.38)$$

忽略(3.37)式右端小量, 并用近似解 U_i 代替上式的 u_i , 可得差分格式

$$\begin{cases} L_h^{IV} U_i = -\varepsilon H_{xx}^{IV} U_i + A_i H_x^{IV} U_i = 0, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ U_0 = \alpha, & U_N = \beta, \end{cases} \quad (3.39)$$

此即横向八阶HDS4格式.

为数值实验编程方便, 系列横向差分格式均可整理成三点形式.

4. 纵向系列修正差分格式

由式(2.1), (2.2)及组式(2.6)得

$$u_{i+1} = u_i + u_i' \left[q_{1i}h + \frac{q_{2i}h^2}{2!} + \frac{q_{3i}h^3}{3!} + \dots \right], \quad (4.1)$$

$$u_{i-1} = u_i - u_i' \left[q_{1i}h - \frac{q_{2i}h^2}{2!} + \frac{q_{3i}h^3}{3!} - \dots \right], \quad (4.2)$$

其中 $q_n(x_i)$ 简写成 q_{ni} , $i = 1, 2, \dots, N-1$, 记

$$S_1 = q_1h + \frac{q_2h^2}{2!} + \frac{q_3h^3}{3!} + \dots, \quad (4.3)$$

$$S_2 = q_1h - \frac{q_2h^2}{2!} + \frac{q_3h^3}{3!} - \dots. \quad (4.4)$$

(4.1), (4.2)式可以简写为

$$u_{i+1} = u_i + u_i' S_{1i}, \quad (4.5)$$

$$u_{i-1} = u_i - u_i' S_{2i}, \quad (4.6)$$

其中 $S_{1i} = S_1(x_i)$, $S_{2i} = S_2(x_i)$. 上两式消去 u_i' , 即得到在点 x_i 处的精确差分方程

$$S_{1i}u_{i-1} + S_{2i}u_{i+1} = (S_{1i} + S_{2i})u_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (4.7)$$

显然要得到高精度的差分格式, 目前我们要做的就是尽量准确地计算 S_{1i}, S_{2i} 的值.

I 纵向差分格式VDS1

对于式(4.3)和式(4.4)中的 q_{ki} 如何近似, 与横向差分格式不同, 当参数 ε 很小时, 观察降阶组式(2.6)中的 q_{ki} ($k = 2, 3, \dots$), 显然关于 $1/\varepsilon$ 的幂次最大的项对于近似 q_{ki} 更重要, 如保留每一个式子的第一项即组式(2.6)的第一列含 $(1/\varepsilon)^{(k-1)}$ 的项近似 q_{ki} 并省略其余项, 得到

$$S_{1i} \approx \tilde{S}_{1i}^I = h + \frac{A_i h^2}{\varepsilon 2!} + \left(\frac{A_i}{\varepsilon} \right)^2 \frac{h^3}{3!} + \dots = \frac{\varepsilon}{A_i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P e_i^k}{k!} = \frac{\varepsilon}{A_i} (e^{P e_i} - 1), \quad (4.8)$$

$$S_{2i} \approx \tilde{S}_{2i}^I = h - \frac{A_i h^2}{\varepsilon 2!} + \left(\frac{A_i}{\varepsilon}\right)^2 \frac{h^3}{3!} - \dots = -\frac{\varepsilon}{A_i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-Pe_i)^k}{k!} = \frac{\varepsilon}{A_i} (1 - e^{-Pe_i}). \quad (4.9)$$

将式(4.8), (4.9)代入式(4.7)式有

$$\tilde{S}_{1i}^I U_{i-1} + \tilde{S}_{2i}^I U_{i+1} = \left(\tilde{S}_{1i}^I + \tilde{S}_{2i}^I\right) U_i. \quad (4.10)$$

将此差分格式记为VDS1, 该格式与Il'in^[6]格式相同.

在进行数值计算时, 小参数情形 $Pe(x) = \frac{A(x)h}{\varepsilon}$ 数过大, 计算机计算 $e^{Pe(x)}$ 值会出现上溢, 为解决该问题将式(4.10)两端同乘以 $\frac{A_i}{\varepsilon} e^{-Pe_i}$, 接下来的格式VDS2与VDS3可进行同样处理.

II 纵向差分格式VDS2

由降阶组式(2.6)观察序列 $q_k (k = 3, 4, \dots)$, 纵向看, 可见 q_k 的前两列通项公式为: $\left(\frac{A(x)}{\varepsilon}\right)^{k-1}$ 和 $\frac{(k-2)(k-1)}{2} \left(\frac{A(x)}{\varepsilon}\right)^{k-3} \frac{A'(x)}{\varepsilon}$, 省略其余项保留这两列作为 $q_k (k \geq 4)$ 的近似, 与 q_1, q_2, q_3 一起代入式(4.3), (4.4), 有

$$\begin{aligned} S_{1i} &\approx \tilde{S}_{1i}^{II} = \tilde{S}_{1i}^I + \frac{A'_i}{\varepsilon} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k-2)(k-1)}{2} \left(\frac{A_i}{\varepsilon}\right)^{k-3} \frac{h^k}{k!} \\ &= \tilde{S}_{1i}^I + \frac{A'_i}{2A_i} e^{Pe_i} h^2 \left(\frac{-2e^{-Pe_i}}{Pe_i^2} + \frac{2}{Pe_i^2} - \frac{2}{Pe_i} + 1 \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} S_{2i} &\approx \tilde{S}_{2i}^{II} = \tilde{S}_{2i}^I + \frac{A'_i}{\varepsilon} \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(k-2)(k-1)}{2} \left(\frac{A_i}{\varepsilon}\right)^{k-3} \frac{h^k}{k!} \\ &= \tilde{S}_{2i}^I + \frac{A'_i}{2A_i} h^2 \left(-\frac{2e^{-Pe_i}}{Pe_i^2} + \frac{2}{Pe_i^2} - \frac{2e^{-Pe_i}}{Pe_i} - e^{-Pe_i} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

将式(4.11), (4.12)代入(4.7)式有

$$\tilde{S}_{1i}^{II} U_{i-1} + \tilde{S}_{2i}^{II} U_{i+1} = \left(\tilde{S}_{1i}^{II} + \tilde{S}_{2i}^{II}\right) U_i. \quad (4.13)$$

此格式记为VDS2.

III 纵向差分格式VDS3

观察组式(2.6)中 $q_k (k = 1, 2, \dots)$, 在VDS2基础上, 如保留分母中关于 ε 相同幂次的第三列和第四列, 即保留 q_k 的前四列, 其通项分别为

$$\left(\frac{A_i}{\varepsilon}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.14)$$

$$\frac{(k-2)(k-1)}{2} \left(\frac{A_i}{\varepsilon}\right)^{k-3} \frac{A'_i}{\varepsilon}, \quad k = 3, 4, \dots, \quad (4.15)$$

$$\frac{(k-3)(k-2)(k-1)}{6} \left(\frac{A_i}{\varepsilon}\right)^{k-4} \frac{A''_i}{\varepsilon}, \quad k = 4, 5, \dots, \quad (4.16)$$

$$\frac{(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)}{8} \left(\frac{A_i}{\varepsilon}\right)^{k-5} \left(\frac{A'_i}{\varepsilon}\right)^2, \quad k = 5, 6, \dots. \quad (4.17)$$

上面四个式子代入(4.3), (4.4)有

$$\begin{aligned} S_{1i} &\approx \tilde{S}_{1i}^{III} = \tilde{S}_{1i}^{II} + \frac{A''_i}{\varepsilon} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(k-3)(k-2)(k-1)}{6} \left(\frac{A_i}{\varepsilon}\right)^{k-4} \frac{h^k}{k!} \\ &\quad + \left(\frac{A'_i}{\varepsilon}\right)^2 \sum_{k=5}^{\infty} \frac{(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)}{8} \left(\frac{A_i}{\varepsilon}\right)^{k-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \tilde{S}_{1i}^{II} + \frac{A''_i}{A_i} h^3 \frac{1}{6} e^{Pe_i} \left(\frac{6e^{-Pe_i}}{Pe_i^3} - \frac{6}{Pe_i^3} + \frac{6}{Pe_i^2} - \frac{3}{Pe_i} + 1 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{8} \left(\frac{A'_i}{\varepsilon} \right)^2 h^4 e^{Pe_i} \left(-\frac{24e^{-Pe_i}}{Pe_i^4} + \frac{24}{Pe_i^4} - \frac{24}{Pe_i^3} + \frac{12}{Pe_i^2} - \frac{4}{Pe_i} + 1 \right), \quad (4.18) \\
 S_{2i} &\approx \tilde{S}_{2i}^{III} = \tilde{S}_{2i}^{II} + \frac{A''_i}{\varepsilon} \sum_{k=4}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(k-3)(k-2)(k-1)}{6} \left(\frac{A_i}{\varepsilon} \right)^{k-4} \frac{h^k}{k!} \\
 &\quad + \left(\frac{A'_i}{\varepsilon} \right)^2 \sum_{k=5}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)}{8} \left(\frac{A_i}{\varepsilon} \right)^{k-5} \\
 &= \tilde{S}_{2i}^{II} + \frac{A''_i}{A_i} h^3 \frac{1}{6} \left(\frac{6e^{-Pe_i}}{Pe_i^3} - \frac{6}{Pe_i^3} + \frac{6e^{-Pe_i}}{Pe_i^2} + \frac{3e^{-Pe_i}}{Pe_i} + e^{-Pe_i} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{8} \left(\frac{A'_i}{\varepsilon} \right)^2 h^4 \left(-\frac{24e^{-Pe_i}}{Pe_i^4} + \frac{24}{Pe_i^4} - \frac{24e^{-Pe_i}}{Pe_i^3} - \frac{12e^{-Pe_i}}{Pe_i^2} - \frac{4e^{-Pe_i}}{Pe_i} - e^{-Pe_i} \right). \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

将式(4.18),(4.19)代入式(4.7)式得

$$\tilde{S}_{1i}^{III} U_{i-1} + \tilde{S}_{2i}^{III} U_{i+1} = \left(\tilde{S}_{1i}^{III} + \tilde{S}_{2i}^{III} \right) U_i. \quad (4.20)$$

记此差分格式为VDS3.

因此时差分格式的系数均是基于降阶组式(2.6)纵向保留, 进行关于 h 的误差阶分析无意义, 而需进行关于 ε 的误差分析, 这是当前研究的难点, 本文亦尚在研究中.

5. 数值实验

例5.1 对流扩散问题

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + \left(x + \frac{\varepsilon}{x}\right) u' = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 1, & u(1) = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

精确解

$$u(x) = \frac{1 - e^{\frac{x^2-1}{2\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{2\varepsilon}}}.$$

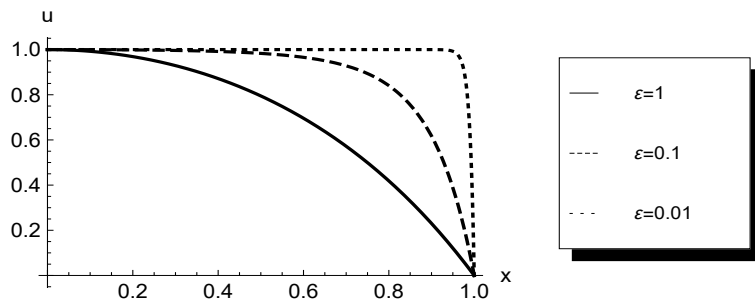


图5.1 参数不同时算例5.1的精确解图

图5.1绘制了该问题精确解图像, 可见当参数 ε 很小时, 解出现右边层.

记 E_h 表示步长为 h 的最大误差, 收敛率 $rate = \log_2 \left(\frac{E_{2h}}{E_h} \right)$. 以下表格中 xEm 表示 x^m .

从下表5.1可见, 当 $\varepsilon = 1$ 时不同数值方法其数值精度从低到高约可排序为: FD1, FD2, FD4, VDS1, VDS2, CDS, FD3, FD6, VDS3, FD5, HDS2, FD7, HDS3, HDS4. 横向修正的差分格式的数值结果是最好的. 因为计算机双精度数机器精度约为 10^{-16} , 数值结果的误差越小时受到舍入误差影响越大, 造成收敛率与理论分析不完全一致. 因本文纵向系列修正差分格式是针对 ε 较小时设计的格式, 数值结果也验证了横向修正差分格式更适宜求解 ε 较大时的问题.

表 5.1 算例5.1, 当 $\varepsilon = 1$ 时最大绝对误差及收敛阶比较

Error/h	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024	1/2048
FD1	9.77E-05	2.81E-05	7.94E-06	2.22E-06	6.14E-07	1.68E-07
rate	*	1.8	1.82	1.84	1.85	1.87
FD2	9.29E-05	2.69E-05	7.63E-06	2.14E-06	5.94E-07	1.63E-07
rate	*	1.79	1.81	1.83	1.85	1.86
FD3	6.23E-06	1.57E-06	3.93E-07	9.83E-08	2.46E-08	6.15E-09
rate	*	1.99	2.00	2.00	2.00	2.00
FD4	1.45E-04	4.14E-05	1.16E-05	3.23E-06	8.87E-07	2.42E-07
rate	*	1.81	1.83	1.85	1.86	1.87
FD5	3.35E-06	8.43E-07	2.11E-07	5.29E-08	1.32E-08	3.31E-09
rate	*	1.99	2.00	2.00	2.00	2.00
FD6	6.12E-06	1.54E-06	3.86E-07	9.66E-08	2.42E-08	6.05E-09
rate	*	1.99	2.00	2.00	2.00	2.00
FD7	1.62E-09	1.01E-10	6.28E-12	4.54E-13	3.01E-13	3.37E-13
rate	*	4.00	4.01	3.79	0.59	-0.16
CDS	1.33E-05	3.32E-06	8.31E-07	2.08E-07	5.19E-08	1.30E-08
rate	*	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
HDS2	1.23E-09	7.68E-11	4.87E-12	5.95E-13	1.48E-12	3.94E-12
rate	*	4.00	3.98	3.03	-1.32	-1.41
HDS3	5.22E-14	1.68E-14	6.77E-14	3.61E-14	2.98E-13	5.16E-12
rate	*	1.64	-2.01	0.91	-3.05	-4.11
HDS4	4.44E-15	1.31E-14	3.73E-14	3.61E-14	2.98E-13	5.16E-12
rate	*	-1.56	-1.51	0.05	-3.05	-4.11
VDS1	6.25E-05	1.81E-05	5.15E-06	1.45E-06	4.01E-07	1.10E-07
VDS2	1.27E-04	3.67E-05	1.04E-05	2.93E-06	8.12E-07	2.23E-07
VDS3	4.35E-06	1.10E-06	2.75E-07	6.89E-08	1.72E-08	4.31E-09

当参数 $\varepsilon = 0.01$ 时, 表5.2中数值方法的精度从低到高约为: FD1, CDS, FD2, VDS1, FD3, FD7, HDS2, FD4, VDS2, FD6, FD5, HDS3, HDS4, VDS3. 但与表5.1比较, 随着参数 ε 的减小, 横向差分格式的计算精度逐渐下降, 而纵向差分格式计算精度逐渐提高, 且此时本文的HDS3, HDS4, VDS3格式计算精度优于文献的七种参考格式. 各种差分格式的计算收敛阶与理论分析基本吻合.

表 5.2 算例5.1, 当 $\varepsilon = 0.01$ 最大绝对误差及收敛阶比较

Error/h	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024	1/2048
FD1	4.17E-02	9.76E-03	2.39E-03	5.99E-04	1.49E-04	3.73E-05
rate	*	2.09	2.03	2.00	2.00	2.00
FD2	2.07E-02	7.07E-03	2.05E-03	5.56E-04	1.44E-04	3.66E-05
rate	*	1.55	1.79	1.88	1.95	1.97
FD3	7.53E-03	7.43E-04	5.72E-05	4.02E-06	2.65E-07	1.70E-08
rate	*	3.34	3.70	3.83	3.92	3.96
FD4	3.03E-03	1.89E-04	1.16E-05	7.34E-07	4.63E-08	3.01E-09
rate	*	4.00	4.02	3.98	3.99	3.94
FD5	2.47E-05	1.77E-06	1.13E-07	7.20E-09	4.51E-10	2.81E-11
rate	*	3.80	3.96	3.98	4.00	4.00
FD6	2.74E-05	1.95E-06	1.25E-07	7.94E-09	4.97E-10	3.11E-11
rate	*	3.81	3.97	3.89	4.00	3.99

FD7	8.66E-02	1.55E-03	5.89E-05	3.23E-06	1.94E-07	1.20E-08
rate	*	5.80	4.72	4.19	4.06	4.01
CDS	8.55E-02	1.95E-02	4.64E-03	1.16E-03	2.90E-04	7.24E-05
rate	*	2.14	2.07	2.00	2.00	2.00
HDS2	1.09E-02	7.58E-04	4.81E-05	3.06E-06	1.91E-07	1.20E-08
rate	*	3.85	3.98	3.97	4.00	4.00
HDS3	7.45E-04	1.34E-05	2.12E-07	3.38E-09	5.25E-11	1.01E-12
rate	*	5.80	5.98	5.97	6.00	5.70
HDS4	2.99E-05	1.35E-07	5.35E-10	2.23E-12	2.98E-13	1.30E-12
rate	*	7.79	7.98	7.90	2.90	-2.13
VDS1	6.43E-04	1.80E-04	4.61E-05	1.17E-05	2.92E-06	7.31E-07
VDS2	3.25E-06	2.56E-07	2.38E-08	3.37E-09	6.77E-10	1.59E-10
VDS3	1.06E-08	2.09E-10	4.82E-12	1.17E-13	1.13E-13	1.57E-13

当参数 $\varepsilon = 0.001$ 时, 表5.3可见各种方法的数值精度从低到高排列约为: CDS, FD1, FD4, FD7, HDS2, FD2, FD3, HDS3, FD6, FD5, VDS1, HDS4, VDS2, VDS3. 与表5.1, 表5.2中数据比较, 随着参数 ε 减小, 与差分格式设计初衷吻合, 此时纵向系列格式的计算精度变差, 而纵向系列修正差分格式的数值精度明显优于纵向系列格式, 亦优于参考格式的计算精度, 说明纵向格式更适宜求解参数 ε 较小的对流扩散问题.

表 5.3 算例5.1, 当 $\varepsilon = 0.001$ 最大绝对误差及收敛阶比较

Error/h	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024	1/2048
FD1	5.91E-01	3.73E-01	1.75E-01	6.21E-02	1.59E-02	3.74E-03
rate	*	0.67	1.07	1.50	1.96	2.09
FD2	6.80E-04	6.08E-03	2.24E-02	2.44E-02	1.04E-02	3.07E-03
rate	*	3.16	-1.88	-0.12	1.23	1.76
FD3	1.85E-07	3.52E-04	6.93E-02	1.36E-02	1.69E-03	1.35E-04
rate	*	-10.89	-7.62	2.35	3.01	3.65
FD4	4.61E-01	2.16E-01	5.50E-02	6.91E-03	4.90E-04	2.94E-05
rate	*	1.09	1.98	2.99	3.82	4.06
FD5	3.46E-08	6.93E-06	1.87E-05	5.11E-06	4.53E-07	2.88E-08
rate	*	-7.65	-1.43	1.87	3.50	3.98
FD6	3.65E-08	7.10E-06	1.89E-05	5.17E-06	4.57E-07	2.91E-08
rate	*	-7.60	-1.42	1.87	3.50	3.98
FD7	8.93E-01	8.07E-01	7.17E-01	3.02E-01	5.38E-03	1.60E-04
rate	*	0.15	0.17	1.25	5.81	5.07
CDS	7.71E-01	5.92E-01	3.42E-01	1.30E-01	3.27E-02	7.50E-03
rate	*	0.38	0.79	1.40	1.99	2.13
HDS2	5.98E-01	3.60E-01	1.32E-01	2.25E-02	1.85E-03	1.16E-04
rate	*	0.73	1.45	2.55	3.61	3.99
HDS3	4.59E-01	2.06E-01	3.95E-02	2.21E-03	4.74E-05	7.47E-07
rate	*	1.15	2.38	4.16	5.54	5.99
HDS4	3.47E-01	1.07E-01	8.38E-03	1.26E-04	6.78E-07	2.67E-09
rate	*	1.70	3.68	6.05	7.54	7.99
VDS1	2.07E-08	9.57E-06	8.18E-05	8.30E-05	2.88E-05	7.28E-06
VDS2	1.01E-09	1.21E-07	2.54E-07	6.38E-08	5.55E-09	3.61E-10
VDS3	3.67E-11	1.05E-09	5.31E-10	3.28E-11	7.03E-13	3.91E-14

表5.4可见各种数值方法计算精度从低到高: FD1, FD4, FD7, CDS, HDS2, HDS3, HDS4,

FD2, FD3, FD5, FD6, VDS1, VDS2, VDS3, 参数变得更小时, 文[3-9]中的FD1, FD2, FD3, FD4, FD7差分格式数值精度亦很低, 而FD5, FD6数值精度较高. 本文设计的横向差分格式数值精度也逐渐变差, 但纵向修正差分格式VSD1, VSD2, VSD3数值精度越来越高, 且优于参考格式计算精度, 说明纵向修正差分格式更适宜于求解小参数奇异扰动问题.

表 5.4 算例5.1, 当 $\varepsilon = 0.0001$ 最大绝对误差及收敛阶比较

Error/h	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024	1/2048
FD1	9.35E-01	8.95E-01	8.12E-01	6.64E-01	4.51E-01	2.32E-01
rate	*	0.06	0.14	0.29	0.56	0.96
FD2	1.09E-07	1.60E-06	2.27E-05	2.95E-04	3.11E-03	1.67E-02
rate	*	-3.88	-3.83	-3.70	-3.40	-2.43
FD3	2.22E-16	8.88E-16	1.67E-15	3.35E-09	5.69E-05	4.22E-01
rate	*	-2.00	-0.91	-20.94	-14.05	-12.86
FD4	9.26E-01	8.57E-01	7.35E-01	5.41E-01	2.94E-01	9.20E-02
rate	*	0.11	0.22	0.44	0.88	1.66
FD5	4.44E-16	2.66E-15	2.66E-15	1.47E-10	2.28E-07	1.88E-06
rate	*	-2.89	0.00	-15.75	-10.60	-3.04
FD6	6.66E-16	1.44E-15	1.78E-15	1.49E-10	2.29E-07	1.88E-06
rate	*	-1.12	-0.30	-16.35	-10.59	-3.04
FD7	1.06	9.77E-01	9.56E-01	9.14E-01	8.39E-01	7.39 e-01
rate	*	0.12	0.03	0.06	0.12	0.18
CDS	9.75E-01	9.50E-01	9.02E-01	8.14E-01	6.60E-01	4.26E-01
rate	*	0.04	0.07	0.15	0.30	0.63
HDS2	9.50E-01	9.02E-01	8.15E-01	6.64E-01	4.42E-01	1.97E-01
rate	*	0.07	0.15	0.29	0.59	1.17
HDS3	9.26E-01	8.57E-01	7.35E-01	5.39E-01	2.86E-01	7.64E-02
rate	*	0.11	0.22	0.45	0.91	1.90
HDS4	9.02E-01	8.14E-01	6.62E-01	4.34E-01	1.75E-01	2.30E-02
rate	*	0.15	0.30	0.61	1.31	2.93
VDS1	4.44E-16	3.33E-16	7.77E-16	5.80E-11	2.19E-07	5.48E-06
VDS2	2.22E-16	2.22E-16	1.78E-15	4.96E-13	4.51E-10	2.70E-09
VDS3	2.22E-16	1.44E-15	1.55E-15	3.44E-15	6.29E-13	8.83E-13

小结: 实验结果与差分格式设计目的吻合, 横向系列修正差分格式适合于求解 ε 较大时的对流扩散问题, 而当 ε 较小时纵向系列修正差分格式数值精度更好. 且本文设计的差分格式的数值精度优于文[3-9]中的差分格式的计算结果. 我们亦针对另外两个算例进行了实验, 得到了类似的结论, 限于文章篇幅省略.

参考文献:

- [1] PHANEENDRA K, RAKMAIAH S, REDDY M C K. Numerical treatment of singular perturbation problems exhibiting dual boundary layers[J]. Ain Shams Engineering Journal, 2015, 6: 1121-1127.
- [2] LIU CheinShan. Solving singular convection-diffusion equation by exponentially-fitted trial functions and adjoint Trefftz test functions[J]. Journal of King Saud University-Science, 2018, 30: 100-105.
- [3] 陈国谦, 陈矛章. 基于中心差分的对流扩散方程四阶紧凑格式[J]. 计算数学, 1994, 11(4): 413-424.
- [4] DENNIS S C R, HUDSON J D. Compact h^4 finite-difference approximations to operators of Navier-Stokes type[J]. Journal of Computational Physics, 1989, 85(2): 390-416.
- [5] 陈国谦, 杨志峰, 高智. 对流扩散方程的四阶指数型差分格式[J]. 计算物理, 1991, 8(4): 359-372.

- [6] ROOS H. Ten ways to generate the Π' in and related schemes[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1994, 53: 43-59.
- [7] TIAN Z F, DAI S Q. High-order compact exponential finite difference methods for convection-diffusion type problems[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 220: 952-974.
- [8] SUN H, ZHANG J. A high order finite difference discretization strategy based on extrapolation for convection diffusion equation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2004, 20(1): 18-32.
- [9] 祁应楠, 武莉莉. 一维定常对流扩散反应方程的高精度紧致差分格式[J]. 华中师范大学学报, 2017, 51(1): 1-6.
- [10] 孙志忠. 偏微分方程数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [11] ROOS H G, STYNES M, TOBISKA L. Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- [12] STIG L, VIDAR T. Partial Differential Equations with Numerical Methods[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
- [13] 杨雪源, 王彩华, 齐海涛, 王同科. 对流扩散方程的一种紧致差分方法[J]. 水动力学研究与进展, 2008, 24(4): 426-437.

Two Kinds of Modified Difference Schemes for Convective Diffusion Equations Without Source Term

WANG Caihua, DU Jinyue, ZHANG Jing

(School of Mathematical Science, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China)

Abstract: In this paper, equidistance difference schemes for the convection diffusion equation without source term are studied. The difference schemes are designed on the three-point template. After expanding the function values at both nodes about the center point by Taylor's expansion, two Taylor expansions are obtained. While the original differential equation is used repeatedly, the higher derivative terms in two Taylor expansions are transformed into expansions containing only the first-order derivative term by means of the idea of "reduced order". Then the first-order derivative can be eliminated combining the two Taylor expansions and a formally accurate difference scheme can be obtained. Since the coefficients of the difference scheme are composed of infinite series, how to preserve finite terms to make the difference scheme suitable for problems with large or small parameters is the focus of this paper. We design two kinds of difference schemes in different situations: when the parameter is large, the power of h has a greater impact on the difference scheme coefficient, so we design a kind of "horizontal series modified difference schemes(HDS)", whose accuracy can reach the second order, the fourth order, the sixth order, the eighth order respectively. However, when the parameter ε is very small, the power of $1/\varepsilon$ has a greater impact on the difference scheme coefficient than the step size, therefore we design a kind of "vertical series modified difference schemes(VDS)". One numerical example is selected to carry on the experiment, and the numerical comparisons are made among the HDS, VDS and the seven difference schemes given in the references. Results show that the horizontal difference schemes(HDS) designed in this paper are suitable for the case where ε is larger, and the vertical series modified difference schemes (VDS) are suitable for the case where ε is very small. And it is also showed that the accuracy of our method is better than that of the difference schemes in references.

Key words: Convection diffusion equation; Small parameter; Difference scheme; Taylor expansion