应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2020, 33(3): 789-799

污染环境中具有尺度结构的周期种群系统的最优控制

龚薇, 王战平
(宁夏大学数学统计学院, 宁夏 银川 750021)

摘要: 本文研究污染环境中具有尺度结构的周期种群系统的最优控制问题. 首先, 利用积分方程及算子理论证明非负解的存在唯一性, 接着利用Mazur定理确定最优策略的存在性, 又借助切锥法锥的技巧, 导出控制问题的最优条件.

关键词: 污染环境; 周期种群; 尺度结构; 最优控制
中图分类号: O175.29; O231.2 **AMS(2000)主题分类:** 92B05
文献标识码: A **文章编号:** 1001-9847(2020)03-0789-11

1. 引言

随着环境污染日益严重, 种群的生存面临着极大威胁. 因此, 我们需要建立模型去解决污染环境中的问题. 然而, 大量的生态学研究表明, 个体尺度结构差异要比年龄结构对种群的发展具有更为重要的影响. 鉴于种群的生存环境经常会经历如季节影响等周期性变化, 这样的外部环境对资源开发具有很大的影响. 由此, 研究污染环境中具有个体尺度周期种群系统的最优控制问题就有了非常重要的现实意义.

近些年, 关于年龄结构的种群模型的行为分析和控制问题有大量的研究成果. 1998年, Anita等研究了周期环境中线性种群模型的最优收获问题, 主要关注收获总量[1], 接着又研究了与年龄相关的种群动力系统的最优收获[2]. 2002年, 陈仁昭等人[3]研究具有空间扩散的种群系统解的存在唯一性及边界控制. 2005 年, 付军等人[4]研究了年龄相关的种群空间扩散系统的广义解及收获控制. 同年, 雒志学和王绵森[5]研究了一类具有年龄结构的线性周期种群动力系统的最优收获控制问题, 主要关注总的经济效益. 2006年, 何泽荣[6]研究了具有年龄结构竞争种群的最优收获. Hritonenko, Yatsenko[7]研究了一类非线性森林资源模型的最优开发问题, 利用变分法推出了最优性条件. 2010年, 何泽荣[8]又研究了具有年龄结构和约束的群落系统的最优收获. 同年, 孙宏雨和赵春[9]研究了具有年龄结构两竞争种群系统的适定性和最优控制. 与此同时, 大量的学者又将个体尺度作为研究的重点, Eucario等人[10]研究了一类具有尺度结构资源模型的最优收获问题. 2008年, Kato研究了非周期环境具有尺度结构线性种群系统的最优控制[11], 随后, 又研究了非线性种群系统的最优控制问题[12]. Gasca-Leya和Hernandez[13]讨论了一类线性尺度结构模型的最优收获时间, 并与非结构化模型做了对比. 何泽荣等人研究了一类周期环境中具有尺度结构的种群模型的适定性及最优收获问题[14], 接着又提出了模拟周期环境和尺度结构的种群系统的最优收获率问题[15]. 2019年, 梁丽宇和雒志学[16]研究了周期环

* **收稿日期:** 2019-09-27
基金项目: 宁夏高等学校科学研究项目(NGY2020010), 宁夏自然科学基金项目(2020AAC03058), 宁夏重点研发计划项目(2020BEG03021)
作者简介: 龚薇, 女, 汉, 宁夏人, 研究方向: 控制理论及其应用.
通讯作者: 王战平.

境中具有尺度结构的捕食种群系统的最优控制问题. 目前, 考虑个体尺度的种群模型较多, 但在污染环境中具有个体尺度周期种群系统的最优控制种群模型尚且没有, 而这样建立的模型更符合实际.

本文结构如下: 第二节提出基本模型, 第三节讨论解的存在唯一性, 第四节用极大值原理及紧性讨论控制问题的存在性, 最后利用法锥技巧得到控制问题的最优条件.

2. 基本模型

本文提出并研究如下污染环境中具有尺度结构周期种群系统模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial[V(x,t)u]}{\partial x}=f(x,t)-\mu(x,t,c_0(t),J(t))u-\alpha(x,c_0(t),J(t))u, & (x,t)\in Q,\\ \dfrac{\mathrm{d}c_0(t)}{\mathrm{d}t}=kc_e(t)-gc_0(t)-mc_0(t), & t\in\mathbb{R}_+,\\ \dfrac{\mathrm{d}c_e(t)}{\mathrm{d}t}=-k_1c_e(t)U(t)+g_1c_0(t)U(t)-hc_e(t)+v(t), & t\in\mathbb{R}_+,\\ V(0,t)u(0,t)=\int_0^l\beta(x,t,c_0(t),R(t))u(x,t)\mathrm{d}x, & t\in\mathbb{R}_+,\\ J(t)=\int_0^l\delta(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x, & t\in\mathbb{R}_+,\\ R(t)=\int_0^l\gamma(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x, & t\in\mathbb{R}_+,\\ 0\le c_0(0)\le 1,0\le c_e(0)\le 1, & \\ U(t)=\int_0^l u(x,t)\mathrm{d}x, & (x,t)\in Q,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in(0,l),\\ u(x,t)=u(x,t+T), & (x,t)\in Q,\end{cases}\tag{2.1}$$

其中$Q=(0,l)\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$, 固定常数$l,T$分别表示个体所不能超越的最大尺度和环境变化周期; 状态变量$u(x,t)$表示t时刻尺度为x的种群个体分布密度; $c_0(t)$和$c_e(t)$分别表示 t时刻有机物中污染物的浓度和环境中污染物的浓度; 控制函数 $\alpha(x,c_0(t),J(t))$表示 t时刻人类对尺度为 x的种群个体的收获努力度; 生命参数 $\beta(x,t,c_0(t),R(t)),\mu(x,t,c_0(t),J(t))$分别表示 t 时刻尺度为 x的种群个体平均出生率和死亡率; $V(x,t)$表示尺度增长率; $v(t)$表示 t时刻外界输入率; $u_0(x)$表示种群分布的初始年龄; $U(t)$表示 t时刻种群总规模; 函数 $f(x,t)$表示外界向种群生存环境的迁入率.

本文做以下假设:

(H_1) $0\le\beta(x,t,c_0(t),R(t))=\beta(x,t+T,c_0(t),R(t))\le\overline{\beta}$ a.e $(x,t)\in Q$, 其中 $\overline{\beta}$ 为常数;

$$(\mathrm{H}_2)\begin{cases}\mu(x,t,c_0(t),J(t))=\mu_0(x,t,c_0(t),J(t))+\overline{\mu}(x,t,c_0(t),J(t)),\mathrm{a.e.}(x,t)\in Q,\\ \mu_0(x,t,c_0(t),J(t))\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,l)),\mu_0(x,t,c_0(t),J(t))\ge 0,\\ \int_0^l\mu_0(x,t,c_0(t),J(t))\mathrm{d}x=+\infty,\\ \overline{\mu}\in L^\infty(Q),\overline{\mu}(x,t,c_0(t),J(t))\ge 0,\overline{\mu}(x,t,c_0(t),J(t))=\overline{\mu}(x,t+T,c_0(t),J(t));\end{cases}$$

$$(\mathrm{H}_3)\begin{cases}V(x,t)\text{ 有界连续, 且对 }\forall t\in\mathbb{R}_+,\text{有 }V(l,t)=0,\\ V(x,t)\text{关于 }x\text{ 满足局部 Lipschitz条件},\\ V(x,t)\ge 0\text{且 }V(x,t)=V(x,t+T),\mathrm{a.e.}(x,t)\in Q;\end{cases}$$

(H_4) $f\in L^\infty(Q),f(x,t)\ge 0$ 且 $f(x,t)=f(x,t+T),\mathrm{a.e.}(x,t)\in Q$;

(H_5) 收获努力度 $\alpha(x,c_0(t),J(t))$ 属于容许控制集 :

$\Omega=\{\alpha\in\mathcal{H}:0\le\underline{\alpha}\le\alpha(x,c_0(t),J(t))\le\overline{\alpha}\}$, 其中 $\underline{\alpha},\overline{\alpha}$ 为已知常数, $\mathcal{H}=\{h\in L^\infty(Q)|h(x,t)=h(x,t+T)\}$, 其范数为:$\|h\|_\infty=\mathrm{ess}\sup\limits_{(x,t)\in Q}|h(x,t)|$.

3. 状态系统的适定性

在本节中, 不失一般性, 假设 $\alpha(x,c_0(t),J(t))\equiv 0$, 模型(2.1)变为如下形式:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial[V(x,t)u]}{\partial x}=f(x,t)-\mu(x,t,c_0(t),J(t))u, & (x,t)\in Q,\\ \dfrac{\mathrm{d}c_0(t)}{\mathrm{d}t}=kc_e(t)-gc_0(t)-mc_0(t), & t\in\mathbb{R}_+,\\ \dfrac{\mathrm{d}c_e(t)}{\mathrm{d}t}=-k_1c_e(t)U(t)+g_1c_0(t)U(t)-hc_e(t)+v(t), & t\in\mathbb{R}_+,\\ V(0,t)u(0,t)=\int_0^l\beta(x,t,c_0(t),R(t))u(x,t)\mathrm{d}x, & t\in\mathbb{R}_+,\\ J(t)=\int_0^l\delta(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x, & t\in\mathbb{R}_+,\\ R(t)=\int_0^l\gamma(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x, & t\in\mathbb{R}_+,\\ 0\le c_0(0)\le 1, 0\le c_e(0)\le 1, & \\ U(t)=\int_0^l u(x,t)\mathrm{d}x, & (x,t)\in Q,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in(0,l),\\ u(x,t)=u(x,t+T), & (x,t)\in Q.\end{cases}\tag{3.1}$$

定义1　$\varphi(t;t_0,x_0)$为初始条件 $x(t_0)=x_0$下常微分方程 $x^{'}(t)=V(x,t)$的解, 称其为系统(2.1)通过点 (t_0,x_0)的特征曲线. 特别地, 在 $x-t$平面上, 记通过点 $(0,0)$的特征曲线为 $z(t)$.

引理1　若函数 $u(x,t)\in L^\infty(Q)$, 沿着每条特征曲线 φ都绝对连续, 且满足

$$\begin{cases}D_\varphi u(x,t)=f(x,t)-[\mu(x,t,c_0(t),J(t))+V_x(x,t)]u(x,t), & \text{a.e.}(x,t)\in Q,\\ V(0,t)\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}u(\varphi(t+\varepsilon;t,0),t+\varepsilon)=\int_0^l\beta(x,t,c_0(t),R(t))u(x,t)\mathrm{d}x, & \text{a.e.}t\in\mathbb{R}_+,\\ \dfrac{\mathrm{d}c_0(t)}{\mathrm{d}t}=kc_e(t)-gc_0(t)-mc_0(t), & t\in\mathbb{R}_+,\\ \dfrac{\mathrm{d}c_e(t)}{\mathrm{d}t}=-k_1c_e(t)U(t)+g_1c_0(t)U(t)-hc_e(t)+v(t), & t\in\mathbb{R}_+,\\ J(t)=\int_0^l\delta(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x, & t\in\mathbb{R}_+,\\ R(t)=\int_0^l\gamma(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x, & t\in\mathbb{R}_+,\\ U(t)=\int_0^l u(x,t)\mathrm{d}x, & (x,t)\in Q,\\ u(x,t)=u(x,t+T), & \text{a.e.}(x,t)\in Q,\end{cases}$$

则称 $(u(x,t),c_0(t),c_e(t))$为系统(3.1)的解. 这里 $D_\varphi u(x,t)$表示 $u(x,t)$沿特征曲线 φ的方向导数, 即

$$D_\varphi u(x,t)=\lim_{h\to 0}\frac{u(\varphi(t+h;t,x),t+h)-u(x,t)}{h}.$$

证　对于 $x-t$平面上第一象限任意固定 (x,t), 当 $x\le z(t)$, 定义初始时刻 $\tau=\tau(x,t)$使得 $\varphi(t;\tau,0)=x$. 于是有 $\varphi(t;\tau,x)=0$. 对于固定函数 $J,R\in L^\infty(0,\mathbb{R}^+)$, $J(t),R(t)\ge 0$, 从而利用特征线法可知, 当 $x\le z(t)$时有

$$c_0(t)=c_0(0)\exp\{-(g+m)t\}+k\int_0^\infty c_e(s)\exp\{(s-t)(g+m)\}\mathrm{d}s,\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}c_e(t)=&c_e(0)\exp\{-\int_0^\infty(k_1P(\tau)+h)d\tau\}+\int_0^\infty(g_1c_0(s)P(s)\\&+\nu(s))\exp\{\int_t^s(k_1P(\tau)+h)\mathrm{d}\tau\}\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$u(x,c_0(t);J,R)=u(0,\varphi^{-1}(0;t,x))\Pi(x,c_0(t),x;J(t))+\int_0^x\frac{f(s,\varphi^{-1}(s;t,x))}{V(s,\varphi^{-1}(s;t,x))}\Pi(s,c_0(t),x;J(t))\mathrm{d}s,$$

其中

$$\Pi(r,c_0(t),x;J(t))=\exp\{-\int_0^r\frac{(\mu(s,t,c_0(t),\varphi^{-1}(s;t,x),J(t))+V_x(s,\varphi^{-1}(s;t,x))}{V(s,\varphi^{-1}(s;t,x))}\mathrm{d}s\}.$$

整理得

$$\begin{aligned}u(x,c_0(t);J,R)=&V(0,\tau)u(0,\tau)\frac{E(c_0(t),x;x,J(t))}{V(x,t)}\\&+\frac{1}{V(x,t)}\int_0^x f(s,\varphi^{-1}(s;t,x))E(c_0(t),s;x,J(t))\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中

$$\tau=t-z^{-1}(x),E(c_0(t),r;x,J(t))=\exp\{-\int_0^r\frac{\mu(s,t,c_0(t),\varphi^{-1}(s;t,x),J(t))}{V(s,\varphi^{-1}(s;t,x))}\}\mathrm{d}s.$$

记 $b(t)=V(0,t)u(0,t)$, 于是有

$$\begin{aligned}u(s,c_0(t);J,R)=&b(t-z^{-1}(x))\frac{E(x,c_0(t);x,J(t))}{V(x,t)}\\&+\frac{1}{V(x,t)}\int_0^x f(s,\varphi^{-1}(s;t,x))E(s,c_0(t);x,J(t))\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{3.4}$$

由(3.1),(3.4)知, 当 t充分大时, $b(.;t)$满足下列积分方程

$$b(.;t)=\int_0^l K(x,t,c_0(t),\mu;J,R)b(t-z^{-1}(x))\mathrm{d}x+F^\mu(t,c_0(t);J,R),\tag{3.5}$$

其中

$$K(x,t,c_0(t),\mu;J,R)=\begin{cases}\beta(x,t,c_0(t),R(t))\frac{E(c_0(t),x;x,J(t))}{V(x,t)}, & 0\le x\le\min\{z(t),l\},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\tag{3.6}$$

$$F^\mu(t,c_0(t);J,R)=\int_0^l\frac{\beta(x,t,c_0(t),R(t))}{V(x,t)}\int_0^x f(s,\varphi^{-1}(s;t,x))E(c_0(t),s;x,J(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}x.\tag{3.7}$$

因为 $b(.;t)\in L_T^\infty(\mathbb{R})$是积分方程(3.5)的解, 则 $u(x,t)$必为(3.1)的解. 我们知道, 若方程(3.5)的解具有存在唯一性, 则状态系统(3.1)的解也具有存在唯一性.

下面证明方程(3.5)的解具有存在唯一性.

首先, 对任意固定满足 (H_2)的 μ, 定义有界线性算子 $\mathcal{A}^\mu:L_T^\infty(\mathbb{R}^+)\to L_T^\infty(\mathbb{R}^+)$,

$$(\mathcal{A}^\mu g)(t,c_0(t);J,R)=\int_0^l K(x,t,c_0(t),\mu;J,R)g(t-z^{-1}(x))\mathrm{d}x+F^\mu(t,c_0(t);J,R).\tag{3.8}$$

由上述定义可知, 方程(3.5)可以写成 $L_T^\infty(\mathbb{R})$中的抽象方程

$$b=\mathcal{A}^\mu b+F^\mu.\tag{3.9}$$

由此得以下结果.

定理1 记 $r(\mathcal{A}^\mu)$为有界线性算子 $\mathcal{A}^\mu$的谱半径, 若 $r(\mathcal{A}^\mu)<1$, 则方程(3.5)在 $L_T^\infty(\mathbb{R})$中有且只有一个解.

证 当 $r(\mathcal{A}^\mu)<1$时, $(I-\mathcal{A}^\mu)^{-1}$存在, 由此知方程(3.9)有唯一解 $b(.;t)=(I-\mathcal{A}^\mu)^{-1}F^\mu$. 从而, 方程(3.5)也有唯一解.

定理2 假设 $R_0:=\int_0^l\sup\limits_{t\to R^+}\beta(x,t,c_0(t),R(t))\frac{S(x,t,c_0(t),J(t))}{V(x,t)}\mathrm{d}x<1$, 则系统(3.1)有唯一解, 其中, 记种群个体的存活概率为

$$S(x,t,c_0(t),J(t))=E(x,c_0(t);x,t,J(t))=\exp\{-\int_0^x\frac{\mu(s,t,c_0(t),\varphi^{-1}(s;t,x),J(t))}{V(s,\varphi^{-1}(s;t,x))}\mathrm{d}s\},$$

净再生数为

$$R_0(t,c_0(t),J,R)=\int_0^l \beta(x,t,c_0(t),R(t))\frac{S(x,t,c_0(t),J(t))}{V(x,t)}\mathrm{d}x.$$

证　由假设可知, $\tau(\mathcal{A}^\mu)\le R_0<1$, 从而由定理 1 可知, 状态系统(3.1)有唯一解.

定理3　若假设 (H_1)-(H_5)及 $R_0<1$均成立, 则对任意固定的 μ, 系统(3.1)有唯一的解 $u^\mu(x,t)$, 且有以下结论:

1) $u^\mu(x,t)\ge 0$, a.e.$(x,t)\in Q$;

2) 如果 $f(x,t)>0$, a.e.$(x,t)\in Q$, 则 $u^\mu(x,t)\ge 0$, a.e.$(x,t)\in Q$;

3) 如果 $\mu_1(x,t,c_0(t),J(t))\ge\mu_2(x,t,c_0(t),J(t))$, a.e.$(x,t)\in Q$; 则 $u^{\mu_1(x,t,c_0(t),J(t))}\le u^{\mu_2(x,t,c_0(t),J(t))}$;

4) 如果在 $L_T^\infty(Q)$中 $f_n\to f$, 则在 $L_T^\infty(Q)$中 $u_n^\mu\to u^\mu$, 其中 u_n^μ,u^μ分别为系统(3.1)相应于 f_n,f的解.

证　1) 由于方程(3.9)的解是 $L_T^\infty(\mathbb{R})$中的迭代序列的极限

$$\begin{cases}b_0(t)=F^\mu(t,c_0(t);J,R), & t\in\mathbb{R}_+,\\ b_{n+1}(t)=F^\mu(t,c_0(t);J,R)+\int_0^l K(x,t,c_0(t),\mu;J,R)b_n(t-z^{-1}(x))\mathrm{d}x, & t\in\mathbb{R}_+,\ n\ge 0,\end{cases}\tag{3.10}$$

当 $f(x,t)\ge 0$, a.e. $(x,t)\in Q$, 有 $F^\mu(t,c_0(t);J,R)\ge 0$, a.e. $t\in\mathbb{R}_+$. 又 $K(x,t,c_0(t),\mu;J,R)\ge 0$, a.e. $(x,t)\in Q$, 于是有 $b_n(t)\ge 0$, 取极限得 $b(t)\ge 0$, 从而由(3.4)得 $u^\mu(x,t)\ge 0$, a.e. $(x,t)\in Q$;

2) 类似1)的证明过程可得到结论;

3) b_n^1,b_n^2分别为相应于 μ_1,μ_2的序列, 由于 $K(x,t,c_0(t),\mu_1;J,R)\le K(x,t,c_0(t),\mu_2;J,R)$, a.e.$(x,t)\in Q$, 且 $F^{\mu 1}(t,c_0(t);J,R)\le F^{\mu 2}(t,c_0(t);J,R)$, a.e. $t\in\mathbb{R}_+$, 则有 $b_n^1(t)\le b_n^2$, a.e. $t\in\mathbb{R}_+$, 取极限得 $b^1(t)\le b^2(t)$, 从而结论3)成立;

4) 如果在 $L_T^\infty(Q)$中 $f_n\to f$, 则在 $L_T^\infty(\mathbb{R})$中 $F_n^\mu\to F^\mu$, 从而由4)式知, 在 $L_T^\infty(Q)$中 $u_n^\mu\to u^\mu$. 证毕.

最后, 要想得控制系统(2.1)解的存在唯一性定理, 只需将模型(3.1)中的 μ由 $\mu+\alpha$替换即可.

引理2　存在正的常数 F_1,F_2,B_1,B_2, 使得对任意 $J_1,J_2,R_1,R_2\in\mathcal{H}$, $t\in(0,T)$, 有

$$|F(c_0(t));J_1,R)-F(c_0(t));J_2,R)|\le F_1\int_0^t|J_1(s)-J_2(s)|\mathrm{d}s,\tag{3.11}$$

$$|F(c_0(t));J,R_1)-F(c_0(t));J,R_2)|\le F_2|R_1(t)-R_2(t)|,\tag{3.12}$$

$$|b(c_0(t);J_1,R)-b(c_0(t);J_2,R)|\le B_1\int_0^t|J_1(s)-J_2(s)|\mathrm{d}s,\tag{3.13}$$

$$|b(c_0(t);J,R_1)-b(c_0(t);J,R_2)|\le B_2\int_0^t|R_1(s)-R_2(s)|\mathrm{d}s,\tag{3.14}$$

其中

$$F_1=M_4L_2,F_2=mM_1M_4L_1,$$
$$B_1=\frac{(F_1+TBK_1)Tg^*M_1}{g_*}\exp^{\frac{Tg^*M_1}{g_*}},B_2=\frac{(F_2+TBK_2)Tg^*M_1}{g_*}\exp^{\frac{Tg^*M_1}{g_*}}.$$

4. 最优策略的存在性

本节我们考虑下述周期环境中的最优收获问题:

$$\max_{\alpha\in\Omega}J(\alpha)=\int_0^l\int_0^T\omega(x,t)\alpha(x,c_0(t),J(t))u^\alpha(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\tag{4.1}$$

其中 $\omega(x,t)\geq 0$为权函数, 表示 t时刻尺度为 x的个体的经济价值. 记 $u^{\alpha}(x,t)$为给定 $\alpha\in\Omega$时控制系统(2.1)的解, 因此 $J(\alpha)$表示在种群演变的一个周期内人类开发资源所获得的总经济效益.

定理4 控制问题(2.1),(4.1)至少存在一个最优解.

证 令 $d=\max\limits_{\alpha\in\Omega}J(\alpha)$, 由定理 3中3)可知,

$$0\leq d\leq M\overline{\alpha}\int_0^T\int_0^l u^{\underline{\alpha}}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t<+\infty,$$

其中 M为权函数 $\omega(x,t)$的上界.

设 $\{\alpha_n:n\geq 1\}$为 $J(\alpha)$中的极大化序列, 使得

$$d-\frac{1}{n}<J(\alpha_n)\leq d. \tag{4.2}$$

由于 u^{α_n}关于 u^n一致有界, 故存在 u^n的子序列(仍记为 u^{α_n}),使得

$$u^{\alpha_n}在\ L^2(Q)\ 中弱收敛于u^*. \tag{4.3}$$

另一方面, 由引理 2 知, 存在 u^n的子序列(仍记为 u^{α_n}), 使得当 $n\to\infty$时, 下列式子成立

$$在L^2(0,T)\ 中\ J^{\alpha_n}\to J^*, R^{\alpha_n}\to R^*,$$

$$对(0,T)\ 中几乎所有的\ t\ ,有\ J^{\alpha_n}(t)\to J^*(t), R^{\alpha_n}(t)\to R^*(t).$$

对序列u^{α_n}应用Mazur定理, 存在序列 $\{\widetilde{u}_n:n\geq 1\}$和实数$\lambda_i^n$, 使得

$$\widetilde{u}_n(x,t)=\sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n u^{\alpha_i}(x,t),\quad \lambda_i^n\geq 0,\quad \sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n=1, \tag{4.4}$$

且

$$\widetilde{u}_n在\ L^2(Q)\ 中收敛于u^*\ . \tag{4.5}$$

定义控制序列

$$\widetilde{\alpha}_n=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n\alpha_i(x,c_0(t),J(t))u^{\alpha_i}(x,t)}{\sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n u^{\alpha_i}(x,t)}, & 若分母不为零;\\ \underline{\alpha}, & 若分母为零,\end{cases} \tag{4.6}$$

显然 $\widetilde{\alpha}_n\in\Omega$, 且 $\widetilde{u}_n(x,t)=u^{\widetilde{\alpha}_n}(x,t)$, a.e.$(x,t)\in Q$.

利用 $L^2(Q)$中有界序列的弱紧性知: 存在 $\widetilde{\alpha}_n$的子序列(仍记为 $\widetilde{\alpha}_n$), 使得

$$\widetilde{\alpha}_n在\ \ L^2(Q)\ 中弱收敛于\alpha^*. \tag{4.7}$$

以下证明 $u^*(x,t)=u^{\alpha^*}(x,t)$, a.e.$(x,t)\in Q$.

根据(4.4)(4.6)和(2.1)可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial[V(x,t)\widetilde{u}_n]}{\partial x}+\dfrac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}=f(x,t)-\sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n\mu(x,t,c_0(t),J^{\alpha_n})\widetilde{u}_n-\widetilde{\alpha}_n(x,c_0(t),J(t))\widetilde{u}_n, & (x,t)\in Q,\\ \dfrac{\mathrm{d}c_0(t)}{\mathrm{d}t}=kc_e(t)-gc_0(t)-mc_0(t), & t\in\mathbb{R}_+,\\ \dfrac{\mathrm{d}c_e(t)}{\mathrm{d}t}=-k_1c_e(t)U(t)+g_1c_0(t)U(t)-hc_e(t)+v(t), & t\in\mathbb{R}_+,\\ V(0,t)\widetilde{u}_n(0,t)=\int_0^l\beta(x,t,c_0(t),R^{\alpha_n}(t))\widetilde{u}_n(x,t)\mathrm{d}x, & t\in\mathbb{R}_+,\\ J^{\alpha_n}(t)=\int_0^l\delta(x,t)\widetilde{u}_n(x,t)\mathrm{d}x, & t\in\mathbb{R}_+,\\ R^{\alpha_n}(t)=\int_0^l\gamma(x,t)\widetilde{u}_n(x,t)\mathrm{d}x, & t\in\mathbb{R}_+,\\ 0\leq c_0(0)\leq 1, 0\leq c_e(0)\leq 1, & \\ \widetilde{U}_n(t)=\int_0^l\widetilde{u}_n(x,t)\mathrm{d}x, & (x,t)\in Q,\\ \widetilde{u}_n(x,0)=\widetilde{u}_0(x), & x\in(0,l),\\ \widetilde{u}_n(x,t)=\widetilde{u}_n(x,t+T), & (x,t)\in Q.\end{cases} \tag{4.8}$$

当 $n\to\infty$时, 对系统(4.8)取极限在弱解意义下可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u^*}{\partial t}+\dfrac{\partial[V(x,t)u^*]}{\partial x}=f(x,t)-\sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n\mu(x,t,c_0(t),J^*(t))u^*-\alpha^*(x,c_0(t),J(t))u^*, & (x,t)\in Q,\\ \dfrac{\mathrm{d}c_0(t)}{\mathrm{d}t}=kc_e(t)-gc_0(t)-mc_0(t), & t\in\mathbb{R}_+,\\ \dfrac{\mathrm{d}c_e(t)}{\mathrm{d}t}=-k_1c_e(t)U(t)+g_1c_0(t)U(t)-hc_e(t)+v(t), & t\in\mathbb{R}_+,\\ V(0,t)u^*(0,t)=\int_0^l\beta(x,t,c_0(t),R^*(t))u^*(x,t)\mathrm{d}x, & t\in\mathbb{R}_+,\\ J^*(t)=\int_0^l\delta(x,t)u^*(x,t)\mathrm{d}x, & t\in\mathbb{R}_+,\\ R^*(t)=\int_0^l\gamma(x,t)u^*(x,t)\mathrm{d}x, & t\in\mathbb{R}_+,\\ 0\le c_0(0)\le 1, 0\le c_e(0)\le 1,\\ U^*(t)=\int_0^l u^*(x,t)\mathrm{d}x, & (x,t)\in Q,\\ u^*(x,0)=u^*(x), & x\in(0,l),\\ u^*(x,t)=u^*(x,t+T), & (x,t)\in Q,\end{cases}\tag{4.9}$$

由此知, u^*是系统(2.1)相应于 α^*的解, 即

$$u^*(x,t)=u^{\alpha^*}(x,t), J^*(t)=J^{\alpha^*}(t), R^*(t)=R^{\alpha^*}(t),\ \text{a.e.}(x,t)\in Q.$$

由(4.3)知 $d-\frac{1}{n}\le\sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^nJ(\alpha_i)\le d$, 故

$$\sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^nJ(\alpha_i)\to d(n\to\infty).$$

另一方面

$$\begin{aligned}\sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^nJ(\alpha_i)&=\sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n\int_Q\omega(x,t)\alpha_i(x,c_0(t),J(t))u^{\alpha_i}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &=\int_Q\omega(x,t)\sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n\alpha_i(x,c_0(t),J(t))u^{\alpha_i}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &=\int_Q\omega(x,t)\widetilde{\alpha}_n(x,c_0(t),J(t))\widetilde{u}_n(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\to\int_Q\omega(x,t)\alpha^*(x,c_0(t),J(t))u^*(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\ \ (n\to\infty)\\ &=\int_Q\omega(x,t)\alpha^*(x,c_0(t),J(t))u^{\alpha^*}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\ \ (n\to\infty)\\ &=J(\alpha^*).\end{aligned}$$

所以$J(\alpha^*)=d=\sup\limits_{\alpha\epsilon\Omega}J(\alpha)$, 这说明 α^*为控制问题的一个最优解.

5. 最优策略的结构

引理3　如果 (α^*,u^{α^*})是控制问题的最优对, (u^*,c_0^*,c_e^*)是对应的最优状态, 对 $\forall\upsilon\in T_\Omega(\alpha^*)$(表示集 Ω在 α^*处的切锥), 当 $\varepsilon>0$充分小时, 有 $\alpha^*+\varepsilon\upsilon\in\Omega$, 则在 $L_T^\infty(Q)$中, 当 $\varepsilon\to 0$时, 有

$$\frac{1}{\varepsilon}[u^{\alpha^*+\varepsilon\upsilon}(x,t)-u^{\alpha^*}(x,t)]\to z(x,t),$$

其中 $z(x,t)$满足下列轨道变分系统

$$\begin{cases} D_\varphi z(x,t)+[\mu(x,t,c_0(t),J(t))+V_x(x,t)]z(x,t)=-\alpha^*(x,c_0(t),J(t))z(x,t)-\upsilon(x,t)u^{\alpha^*}(x,t),\\ V(0,t)z(0,t)=\int_0^l\beta(x,t,c_0(t),R(t))z(x,t)\mathrm{d}x,\\ z(x,t)=z(x,t+T). \end{cases} \tag{5.1}$$

证 系统(5.1)解的存在唯一性可类似于系统(2.1)处理. 由于 $u^{\alpha^*+\varepsilon\upsilon},u^{\alpha^*}$分别为系统(2.1)相应与 $\alpha^*+\varepsilon\upsilon,\alpha^*\in\Omega$的解, 记

$$\theta_\varepsilon(x,t)=\frac{1}{\varepsilon}[u^{\alpha^*+\varepsilon\upsilon}(x,t)-u^{\alpha^*}(x,t)]-z(x,t),$$

显然 $\theta_\varepsilon(x,t)$是如下系统的解

$$\begin{cases} D_\varphi\theta_\varepsilon(x,t)+[\mu(x,t,c_0(t),J(t))+V_x(x,t)]\theta_\varepsilon(x,t)=-\alpha^*\theta_\varepsilon(x,c_0(t),J(t))\\ \qquad\qquad -\upsilon(u^{\alpha^*+\varepsilon\upsilon}(x,t)-u^{\alpha^*(x,t)}),\\ V(0,t)\theta_\varepsilon(0,t)=\int_0^l\beta(x,t,c_0(t),R(t))\theta_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x,\\ \theta_\varepsilon(x,t)=\theta_\varepsilon(x,t+T). \end{cases}$$

由定理 3 的结论3)知, 在 $L_T^\infty(Q)$中, 当 $\varepsilon\to0$时,$u^{\alpha^*+\varepsilon\upsilon}(x,t)-u^{\alpha^*}(x,t)\to0$. 由此可得, 当 $\varepsilon\to0$时, $\theta_\varepsilon(x,t)\to0$. 证毕.

定理5 设 (α^*,u^{α^*})是控制问题(2.1)的最优对, 则最优策略具有如下结构

$$\alpha^*(x,c_0(t),J(t))=\mathcal{L}_1\Big(\frac{[\omega(x,t)-q_1(x,t)]u^*(x,t)}{c_1}\Big)\ \text{在 Q 上几乎处处成立},$$

$$u^{\alpha^*}(t)=\mathcal{L}_2\Big(\frac{q_3(t)}{c_2}\Big)\ \text{在 (0,T) 上几乎处处成立},$$

其中

$$\mathcal{L}_i(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\le x\le H_i, i=1,2.\\ H_i, & x>H_i,\end{cases} \tag{5.2}$$

(q_1,q_2,q_3)是下列共轭系统相应于 (α^*,u^{α^*})的解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial t}+\dfrac{\partial[V(x,t)q_1]}{\partial x}=[\mu(x,t,c_0^*(t),J^*(t))+\alpha^*(x,c_0(t),J(t))]q_1(x,t)-k_1c_e^*(t)q_3(t)-g_1c_0^*(t)q_3(t)\\ \qquad +q_1(x,t)\int_0^\infty\dfrac{\partial\beta(x,t,c_0^*(t),R^*(t))}{\partial R}u^*(x,t)\int_0^l\gamma(x,t)\mathrm{d}x-\beta(x,t,c_0^*(t),R^*(t))q_1(x,t)\\ \qquad -\omega(x,t)u^*(x,t)+\int_0^\infty\dfrac{\partial\mu(x,t,c_0^*(t),J^*(t))}{\partial J}u^*(x,t)q_1(x,t)\int_0^l\delta(x,t)\mathrm{d}x\\ \qquad +\int_0^\infty\dfrac{\partial\alpha^*(x,c_0^*(t),J^*(t))}{\partial J}u^*(x,t)q_1(x,t)\int_0^l\delta(x,t)\mathrm{d}x,\\ \dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}=\int_0^l\dfrac{\partial\mu(x,t,c_0^*(t),J^*(t))}{\partial c_0}u^*(x,t)q_1(x,t)\mathrm{d}x+(g+m)q_2(t)-g_1u^*(t)q_3(t)\\ \qquad +q_1(x,t)\int_0^l\dfrac{\partial\beta(x,t,c_0^*(t),R^*(t))}{\partial c_0}u^*(x,t)\mathrm{d}x+\int_0^l\dfrac{\partial\alpha^*(x,c_0^*(t),J^*(t))}{\partial c_0}u^*(x,t)q_1(x,t)\mathrm{d}x,\\ \dfrac{\mathrm{d}q_3}{\mathrm{d}t}=kq_2+k_1u^*(t)q_3(t)+hq_3(t),\\ q_1(0,T)=q_1(l,t)=0,q_2(T)=q_3(T)=0,q_1(x,t)=q_1(x,t+T). \end{cases} \tag{5.3}$$

证 因为 (α^*,u^{α^*})是控制问题(2.1)的最优对, 对于任意固定的 $\nu\in T_\Omega(\alpha^*)$, 以及充分小的 $\varepsilon>0$时, 有 $\alpha^\varepsilon:=\alpha^*+\varepsilon\nu\in\Omega$, 由 $J(\alpha^*)$为 $J(\alpha)$的最大值, 即 $J(u^*+\varepsilon,v^*+\varepsilon)\le J(u^*,v^*)$,

可得

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^l \omega(x,t)[\alpha^*(x,c_0(t),J(t))+\varepsilon v(x,t)]u^\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \le&\int_0^T\int_0^l \omega(x,t)\alpha^*(x,c_0(t),J(t))u^*(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即

$$\int_0^T\int_0^l \omega(x,t)u^*(x,t)z_1(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_0^l \omega(x,t)u^*(x,t)v_1\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le 0, \tag{5.4}$$

其中 $z_1(x,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(u^\varepsilon(x,t)-u^*(x,t))$; $z_2(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(c_0^\varepsilon(t)-c_0^*(t))$; $z_3(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(c_e^\varepsilon(t)-c_e^*(t))$, u^ε相应于 $(u^*+\varepsilon v,v^*+\varepsilon v)$. 由于 $z_1(x,t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$有意义, 同时 (z_1,z_2,z_3)满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z_1}{\partial x}+\dfrac{\partial z_1}{\partial t}=-[\mu(x,t,c_0^*(t),J^*(t))+\alpha^*(x,c_0^*(t),J^*(t))+V_x]z_1(x,t)-\nu_1u^*(x,t)\\ \qquad\qquad-\dfrac{\partial\mu(x,t,c_0^*(t),J^*(t))}{\partial c_0}u^*(x,t)z_2(t)-\dfrac{\partial\alpha^*(x,c_0^*(t),J^*(t))}{\partial c_0}u^*(x,t)z_2(t)\\ \qquad\qquad-\dfrac{\partial\mu(x,t,c_0^*(t),J^*(t))}{\partial J}u^*(x,t)M(t)-\dfrac{\partial\alpha^*(x,c_0^*(t),J^*(t))}{\partial J}u^*(x,t)M(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t}=kz_3(t)-gz_2(t)-mz_2(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}z_3}{\mathrm{d}t}=-k_1c_e^*(t)Z_1(t)+g_1c_0^*(t)Z_1(t)+g_1U^*(t)z_2(t)-(k_1U^*(t)+h)z_3(t)+v_2(t),\\ V(0,t)z_1(0,t)=\int_0^l\beta(x,t,c_0^*(t),R^*(t))z_1(x,t)\mathrm{d}x-\int_0^l\dfrac{\partial\beta(x,t,c_0^*(t),R^*(t))}{\partial c_0}u^*(x,t)z_2(t)\mathrm{d}x\\ \qquad\qquad-\dfrac{\partial\beta(x,t,c_0^*(t),R^*(t))}{\partial R}u^*(x,t)W(t)\mathrm{d}x,\\ M(t)=\int_0^l\delta(x,t)z_1(x,t)\mathrm{d}x,\\ W(t)=\int_0^l\gamma(x,t)z_1(x,t)\mathrm{d}x,\\ z_1(x,0)=z_2(0)=z_3(0)=0,\\ z_1(x,t)=z_1(x,t+T),\\ Z_1=\int_0^l z_1(x,t)\mathrm{d}x,U^*=\int_0^l u^*(x,t)\mathrm{d}x,Z_1(x,T)=0.\end{cases} \tag{5.5}$$

在(5.5)的前三式分别乘以 q_1, q_2, q_3, 第一式在Q上积分, 第二, 第三式在 $\mathbb{R}_+$上积分得以下结果:

在(5.5)的一式两边同时乘以 q_1, 并在 Q上积分, 得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^l[z_t+(Vz)_x]q_1\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ =&\int_0^\infty\int_0^l-\mu(x,t,c_0^*(t),J^*(t))z_1q_1\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^\infty\int_0^l\frac{\partial\mu(x,t,c_0^*(t),J^*(t))}{\partial c_0}u^*(x,t)z_2(t)q_1\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &-\int_0^\infty\int_0^l\frac{\partial\alpha^*(x,c_0^*(t),J^*(t))}{\partial c_0}u^*(x,t)z_2(t)q_1\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &-\int_0^\infty\int_0^l\frac{\partial\mu(x,t,c_0^*(t),J^*(t))}{\partial J}u^*(x,t)M(t)q_1\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &-\int_0^\infty\int_0^l\frac{\partial\alpha^*(x,c_0^*(t),J^*(t))}{\partial J}u^*(x,t)M(t)q_1\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &-\int_0^\infty\int_0^l\nu_1u^*(x,t)q_1\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^\infty\int_0^l\alpha^*(x,c_0^*(t),J^*(t))z_1q_1\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5.6}$$

在(5.5)的二式两边同时乘以 q_2, 并在 $\mathbb{R}_+$上积分, 得

$$-\int_0^\infty z_2 dq_2 = \int_0^\infty kz_3(t)q_2\mathrm{d}t - \int_0^\infty gz_2(t)q_2\mathrm{d}t - \int_0^\infty mz_2(t)q_2\mathrm{d}t. \tag{5.7}$$

在(5.5)的三式两边同时乘以 q_3, 并在 $\mathbb{R}_+$上积分, 得

$$\begin{aligned}-\int_0^\infty z_3 dq_3 =& \int_0^\infty\int_0^l -k_1c_e^*(t)z_1(x,t)q_3\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^\infty\int_0^l g_1c_0^*(t)z_1(x,t)q_3\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^\infty v_1(t)q_3\mathrm{d}t\\ &+ \int_0^\infty\int_0^l g_1u^*(x,t)z_2(t)q_3\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^\infty\int_0^l (k_1u^*(x,t)+h)z_3(t)q_3\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5.8}$$

于是, 由(5.6)(5.7)(5.8)结合(5.3)可得以下结果

$$\int_0^\infty\int_0^l \omega(x,t)u^*(x,t)z_1(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int_0^\infty\int_0^l v_1(x,t)u^*(x,t)q_1(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^\infty v_2(t)q_3(t)\mathrm{d}t. \tag{5.9}$$

将(5.9)代入(5.4)可得

$$\int_0^\infty\int_0^l (\omega(x) - q_1(x,t))u^*\nu_1\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^\infty q_3(t)v_2\mathrm{d}t \le 0,\ (v_1,v_2)\in(u^*,v^*).$$

因此, 根据法锥性质可知: $((\omega(x)-q_1)u^*(x,t), q_3(t)) \in N_U(\alpha^*, v^*)$, 即定理结论成立.

参考文献:

[1] ANITA S, IANNELLI M, KIM M Y, et al. Optimal harvesting for age-dependent population dynamics[J]. SIAM J. Appl. Math., 1998, 58(5): 1648-1666.

[2] ANITA S. Analysis and Control of Age-Dependent Population Dynamics[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000, 10-50.

[3] CHEN R Z, ZHANG D S, LI J Q. Existence and uniquence of the solution and boundary contral for population systems with spatial diffusion[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Science, 2002, 22(1): 1-13.

[4] FU J, LI J Q, CHEN R Z. Generalised solution and optimal harvesting control for age-dependent population spatial diffusion system[J]. Control Theory and Applications, 2005, 22(4): 588-596.

[5] LUO Z X, WANG M S. Optimal harvesting control problem for linear periodic age-dependent population dynamic system[J]. Acta Mathematica Scientia, 2005, 25A(6): 905-912.

[6] HE Z R. Optimal harvesting of two competing species with age dependence[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2006, 7: 769-788.

[7] HRITONENKO N, YATSENKO Y, GOETZ R U, et al. Maximum principle for a size-structured model of forest and carbon sequestration management[J]. Applied Mathematics Letters, 2008, 21: 1090-1094.

[8] HE Z R. Optimal harvesting of population systems with age structure and constraints[J]. Acta Mathematica Scientia, 2010, 30A(2): 1037-1048.

[9] SUN H Y, ZHAO C. The well posedness and the optimal control of two competing species with age-dependence[J]. Acta Mathematica Applicatae Sinica, 2010, 33(6): 1037-1048.

[10] EUCARIO G L, et al. Optimal harvesting time in a size-heterogeneous population[J]. Ecological Modeling, 2008, 210: 161-168.

[11] KANO N. Maximum principle for optimal harvesting in linear size-structured population[J]. Mathematical Population Studies, 2008, 15: 123-136.

[12] KANO N. Optional harvesting for a nonlinear size-structured population dynamic[J]. Math. Anal. Appl., 2008, 324: 1388-1398.

[13] GASCA-LEYA E, HERNANDEZ J M, VELIOV V M. Optimal harvesting time in a size-heterogeneous population[J]. Ecological modeling, 2008, 210: 161-168.

[14] HE Z R, LIU R, LIU L L. Optional harvesting of a size-structured population model in a periodic environment[J]. Acta Mathematica Applicatae Sinica, 2014, 37(1): 146-159.

[15] HE Z R, LIU R, LIU L L. Optional harvest rate for a population system modeling periodic enviroment and body size[J]. Acta Mathematica Scientia, 2014, 34A(3): 684-690.

[16] LIANG L Y, LUO Z X. Optimal control of a size structured system with two species in periodic environments[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2019, 54(8): 1-8.

Optimal Control of Nonlinear Periodic Population Dynamic Systems with Individual Scale in a Polluted Environment

GONG Wei, WANG Zhanping

(*School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China*)

Abstract: In this paper, we study an optimal problem of nonlinear periodic population with individual scale in a polluted environment. Firstly, we obtain the existence and uniqueness of nonnegative solution of the model by integral equation and operator theory. Then, the existence of optimal strategy is determined by using Mazur theorem, and the optimal condition of control problem is derived by means of tangent and normal cones in nonlinear analysis.

Key words: Polluted environment; Periodic population; Individual-scale; Optimal control