应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2020, 33(3): 800-806

带约束集值均衡问题的近似Henig有效解

胡莎莎, 徐义红, 牛智超
(南昌大学数学系, 江西 南昌 330031)

摘要: 在Hausdorff局部凸拓扑线性空间中引进了带约束集值均衡问题近似Henig有效解的概念. 在没有任何凸性假设下, 利用非线性泛函建立了该解的必要和充分最优性条件. 特别地, 通过减弱泛函的性质建立了该解的另一充分最优性条件.

关键词: 集值均衡问题; 近似Henig有效解; 非线性标量化; 最优性条件
中图分类号: O221 **AMS(2000)主题分类:** 90C33; 90C46; 90C59
文献标识码: A **文章编号:** 1001-9847(2020)03-0800-07

1. 引言

向量均衡问题是许多实际领域中的一个广泛问题. 它涵盖了许多典型的数学问题, 如向量优化, 变分不等式, 向量纳什均衡, 向量互补等. 它广泛应用于投资决策, 定量经济, 最优控制和工程技术. 由于所涉问题的普遍性和统一性以及解决这些问题之普遍, 向量均衡问题已成为运筹学和非线性分析领域的热点问题[1−6]. LONG等[1]在近似锥次类凸性假设下获得了带函数约束的向量均衡问题Henig有效解的最优性条件. Luu等[2−3]建立了带等式和不等式约束的向量均衡问题有效解的充分和必要条件, 同时建立了带约束向量均衡问题局部有效解的Fritz-John和Karush-Kuhn-Tucker最优性必要条件. GONG[4−6]在锥凸性假设下获得了带约束向量均衡问题有效解的最优性条件, 在Banach空间中利用非线性泛函和Ioffe次可微获得了非凸向量均衡问题弱有效解, Henig有效解, 超有效解以及全局有效解的最优性条件.

Gerth等[7]利用非凸分离定理, 得到了弱有效点和真有效点的标量化结果. 借助Gerstewitz函数, LI等[8]建立了集值非凸优化问题的必要和充分最优性条件. 在没有任何凸性假设下, ZHENG[9]利用连续单调Minkowski泛函, 获得了赋范空间中Henig有效点的标量化特征.

另外, 在非紧可行集的情况下, 精确解集有可能是空集, 而在条件较弱情况下, 近似解集可以是非空的. 因此, 研究近似解不仅具有理论价值, 而且具有实际意义. QIU等[10−11] 利用集值函数研究了向量优化问题的近似解, 同时得到了向量均衡问题近似弱有效解和近似Henig有效解的标量化特征.

受以上研究的启发, 我们在没有任何凸性假设的情况下, 利用非线性泛函讨论近似Henig有效解的必要和充分最优性条件.

2. 预备知识

---

* **收稿日期:** 2019-09-27
基金项目: 国家自然科学基金项目 (11961047), 江西省自然科学基金项目 (20192BAB201010), 南昌大学科研训练项目 (55001942)
通讯作者: 徐义红, 男, 汉, 江西人, 教授, 博士生导师, 研究方向: 最优化理论与方法.

设X为拓扑线性空间, Y和Z为Hausdorff局部凸拓扑线性空间, C和D分别是Y和Z中的点凸锥且$\mathrm{int}C \neq \varnothing$, $\mathrm{int}D \neq \varnothing$, Y^*和Z^*分别为Y和Z的拓扑对偶空间. 设X_0为X的非空子集, $\varPhi : X_0 \times X_0 \to 2^Y$, $G : X_0 \to 2^Z$是集值映射.

设S是Y的非空子集, S的生成锥为

$$\mathrm{cone}(S) = \{\lambda s : \lambda \geq 0, s \in S\}.$$

$\mathrm{int}S$, $\mathrm{cl}S$和∂S分别表示S的内部, 闭包和边界. S称为点的, 若$S \cap (-S) \subset \{0\}$.

我们称一个非空凸集$B \subset C$是C的基, 如果满足下面两个条件

(i) $0 \notin \mathrm{cl}B$;

(ii) $C = \mathrm{cone}(B) = \bigcup\{\lambda b : \lambda \geq 0, b \in B\}$.

设B是C的基, 由凸集分离定理, 存在$y^* \in Y^* \backslash \{0\}$使得$r = \inf\{y^*(b) : b \in B\} > y^*(0) = 0$. 记$V_B = \{y \in Y : \mid y^*(y) \mid < \frac{r}{2}\}$, 则$V_B$ 是Y中零的均衡凸开邻域. 显然,

$$\inf\{y^*(y) : y \in B + V_B\} \geq \frac{r}{2}.$$

于是, 对于任意零的凸邻域$U \subset V_B$, $B + U$是凸集且$0 \notin \mathrm{cl}(B + U)$. 因此, 由文[12]知$\mathrm{cone}(B + U)$是点凸锥且$C \backslash \{0\} \subset \mathrm{intcone}(B + U)$.

定义2.1[7]　(i) 泛函$\xi : Y \times Z \to \mathbb{R}$称为$C \times D$-单调的, 如果

$$(y_1 - y_2, z_1 - z_2) \in C \times D \Rightarrow \xi(y_1, z_1) \geq \xi(y_2, z_2);$$

(ii) 泛函$\xi : Y \times Z \to \mathbb{R}$称为严格$C \times D$-单调的, 如果

$$(y_1 - y_2, z_1 - z_2) \in \mathrm{int}C \times \mathrm{int}D \Rightarrow \xi(y_1, z_1) > \xi(y_2, z_2).$$

定义2.2[7]　设$k \in \mathrm{int}C \times \mathrm{int}D$, $(y_0, z_0) \in Y \times Z$. 泛函$\xi : Y \times Z \to \mathbb{R}$定义为

$$\xi(y, z) = \inf\{t \in \mathbb{R} : (y, z) \in tk + (y_0, z_0) - C \times D\},\ y \in Y,\ z \in Z.$$

由文[7], 我们得到泛函ξ的性质.

引理2.1　若$k \in \mathrm{int}C \times \mathrm{int}D$, $(y_0, z_0) \in Y \times Z$, 则

(i) $\xi(y, z) < t \Longleftrightarrow (y, z) \in tk + (y_0, z_0) - \mathrm{int}C \times \mathrm{int}D$;

(ii) $\xi(y, z) \leq t \Longleftrightarrow (y, z) \in tk + (y_0, z_0) - \mathrm{cl}(C \times D)$;

(iii) $\xi(y, z) \geq t \Longleftrightarrow (y, z) \notin tk + (y_0, z_0) - \mathrm{int}C \times \mathrm{int}D$;

(iv) $\xi(y, z) > t \Longleftrightarrow (y, z) \notin tk + (y_0, z_0) - \mathrm{cl}(C \times D)$;

(v) $\xi(y, z) = t \Longleftrightarrow (y, z) \in tk + (y_0, z_0) - \partial C \times \partial D$;

(vi) ξ是$Y \times Z$上的严格$C \times D$-单调连续凸泛函.

引理2.2　若$k \in \mathrm{int}C \times \mathrm{int}D$, $(y_0, z_0) \in Y \times Z$, 则对任意的$y \in Y$, $z \in Z$, $\alpha \geq 0$有

$$\xi((y, z) - \alpha k) = \xi(y, z) - \alpha.$$

证　对任意的$y \in Y$, $z \in Z$有

$$\begin{aligned}\xi((y, z) - \alpha k) &= \inf\{t \in \mathbb{R} : (y, z) - \alpha k \in tk + (y_0, z_0) - C \times D\}\\ &= \inf\{t \in \mathbb{R} : (y, z) \in (t + \alpha)k + (y_0, z_0) - C \times D\}\\ &= \inf\{\mu - \alpha \in \mathbb{R} : (y, z) \in \mu k + (y_0, z_0) - C \times D\}\\ &= \xi(y, z) - \alpha.\end{aligned}$$

由引理2.2可得下面的推论.

推论2.1　若$k \in \mathrm{int}C \times \mathrm{int}D$, $(y_0, z_0) \in Y \times Z$, 则对任意的$y \in Y$, $z \in Z$, 下面结论成立

(i) $\xi((y, z) + \alpha k) = \xi(y, z) + \alpha$, $\forall \alpha \geq 0$;

(ii) $\xi((y, z) - \alpha k) < \xi(y, z) < \xi((y, z) + \alpha k)$, $\forall \alpha > 0$;

(iii) $\xi((y, z) + \alpha_1 k) < \xi((y, z) + \alpha_2 k)$, $\forall \alpha_1 < \alpha_2$.

证 类似引理2.2的证明.

记可行集$A=\{x\in X_0: G(x)\cap(-D)\neq\varnothing\}$. 考虑以下带约束集值均衡问题(记为$\Phi$-SEPC): 找一个$\bar{x}\in A$使

$$\Phi(\bar{x},x)\cap(-P)=\varnothing,\ \forall x\in A,$$

其中$P\cup\{0\}$是Y中的凸锥.

下面引进带约束集值均衡问题Henig有效解及近似Henig有效解的概念.

定义2.3 设$\bar{x}\in A$, 若存在零的均衡凸邻域$U\subset V_B$使得

$$\Phi(\bar{x},x)\cap(-\mathrm{intcone}(B+U))=\varnothing,\ \forall x\in A.$$

则称$\bar{x}$为(Φ-SEPC)的一个Henig有效解.

定义2.4 设$\varepsilon\in C$, $\bar{x}\in A$, 若存在零的均衡凸邻域$U\subset V_B$使得

$$(\Phi(\bar{x},x)+\varepsilon)\cap(-\mathrm{intcone}(B+U))=\varnothing,\ \forall x\in A.$$

则称$\bar{x}$为(Φ-SEPC)的一个ε-Henig有效解.

3. 带约束集值均衡问题的最优性条件

下面给出带约束集值均衡问题近似Henig有效解的必要和充分最优性条件.

若$\varnothing\neq S\subset Y$, $\varnothing\neq M\subset Z$, $\psi: Y\times Z\to\mathbb{R}$, 则

$$\psi(S,M)\geq 0\quad \text{表示}\quad \psi(y,z)\geq 0, \forall y\in S, z\in M.$$

由于$\varepsilon\in C=\mathrm{cone}B$, 因此存在$\lambda_0\geq 0, b_0\in B$使得$\varepsilon=\lambda_0 b_0$.

定理3.1 设$\varepsilon\in C$, $\bar{x}\in A$. 若$\bar{x}$是(Φ-SEPC)的一个ε-Henig有效解, 则存在$Y\times Z$ 上连续凸泛函ψ 使得

(i) 若$y_1-y_2\in C\backslash\{0\}$, $z_1-z_2\in\mathrm{int}D$, 则$\psi(y_1,z_1)>\psi(y_2,z_2)$;

(ii) $\psi(y,z)\geq 0,\ \forall y\in\Phi(\bar{x},x),\ z\in G(x),\ x\in X_0$;

(iii) $\psi(-\varepsilon,0)=0$;

(iv) 存在$\delta>0$, $d_0\in\mathrm{int}D$使得$\psi(-b,-\delta d_0)\leq-\delta+\lambda_0, \forall b\in B$.

证 由于$\bar{x}$是(Φ-SEPC)的ε-Henig有效解, 因此存在零的均衡凸邻域$U\subset V_B$使得

$$\Phi(\bar{x},x)\cap(-\varepsilon-\mathrm{intcone}(B+U))=\varnothing,\ \forall x\in A. \tag{3.1}$$

下证

$$(\Phi(\bar{x},x),G(x))\cap(-\varepsilon-\mathrm{intcone}(B+U),-\mathrm{int}D)=\varnothing,\ \forall x\in X_0.$$

反证法, 假设存在$\hat{x}\in X_0$使得

$$(\Phi(\bar{x},\hat{x}),G(\hat{x}))\cap(-\varepsilon-\mathrm{intcone}(B+U),-\mathrm{int}D)\neq\varnothing.$$

则

$$\Phi(\bar{x},\hat{x})\cap(-\varepsilon-\mathrm{intcone}(B+U))\neq\varnothing, \tag{3.2}$$

且

$$G(\hat{x})\cap(-\mathrm{int}D)\neq\varnothing. \tag{3.3}$$

由(3.3)得$G(\hat{x})\cap(-D)\neq\varnothing$, 由此可得$\hat{x}\in A$, 再结合(3.2)得

$$\Phi(\bar{x},\hat{x})\cap(-\varepsilon-\mathrm{intcone}(B+U))\neq\varnothing,\ \hat{x}\in A,$$

这与(3.1)矛盾. 因此

$$(\Phi(\bar{x},x),G(x))\cap(-\varepsilon-\mathrm{intcone}(B+U),-\mathrm{int}D)=\varnothing,\ \forall x\in X_0. \tag{3.4}$$

取$d_0\in\mathrm{int}D$, 则$(b_0,d_0)\in(\mathrm{intcone}(B+U),\mathrm{int}D)$. 定义泛函$\psi: Y\times Z\to\mathbb{R}$为

$$\psi(y,z)=\inf\{t\in\mathbb{R}:(y,z)\in t(b_0,d_0)+(-\varepsilon,0)-\mathrm{cone}(B+U)\times D\},\ y\in Y,\ z\in Z.$$

(i) 若$y_1-y_2\in C\backslash\{0\}$, 由$C\setminus\{0\}\subset \mathrm{intcone}(B+U)$得$y_1-y_2\in \mathrm{intcone}(B+U)$, 再结合$z_1-z_2\in \mathrm{int}D$和引理2.1(vi)知(i)成立.

(ii) 设$(y_0,z_0)\in(\varPhi(\bar{x},x),G(x))$. 由(3.4)有

$$(y_0,z_0)\notin(-\varepsilon,0)-\mathrm{intcone}(B+U)\times \mathrm{int}D. \tag{3.5}$$

显然, $t(b_0,d_0)+(-\varepsilon,0)\in(-\varepsilon,0)-\mathrm{intcone}(B+U)\times\mathrm{int}D$, $\forall t<0$. 另一方面, 当$t<0$时,

$$\begin{aligned}&t(b_0,d_0)+(-\varepsilon,0)-\mathrm{cone}(B+U)\times D\\ \subset&(-\varepsilon,0)-\mathrm{intcone}(B+U)\times\mathrm{int}D-\mathrm{cone}(B+U)\times D\\ \subset&(-\varepsilon,0)-\mathrm{intcone}(B+U)\times\mathrm{int}D.\end{aligned}\tag{3.6}$$

由(3.5)和(3.6)得, 当$t<0$时,

$$(y_0,z_0)\notin t(b_0,d_0)+(-\varepsilon,0)-\mathrm{cone}(B+U)\times D.$$

于是, 若$(y_0,z_0)\in t(b_0,d_0)+(-\varepsilon,0)-\mathrm{cone}(B+U)\times D$, 则$t\geq 0$. 由泛函$\psi$的定义得 $\psi(y_0,z_0)\geq 0$. 因此

$$\psi(y,z)\geq 0,\ \forall y\in\varPhi(\bar{x},x),\ z\in G(x),\ x\in X_0.$$

(iii) 由泛函ψ的定义得

$$\psi(-\varepsilon,0)=\inf\{t\in\mathbb{R}:t(b_0,d_0)\in\mathrm{cone}(B+U)\times D\}. \tag{3.7}$$

取数列$a_n=\frac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$, 显然,

$$\{a_n:n=1,2,\ldots\}\subset\{t\in\mathbb{R}:t(b_0,d_0)\in\mathrm{cone}(B+U)\times D\}.$$

于是

$$\inf\{t\in\mathbb{R}:t(b_0,d_0)\in\mathrm{cone}(B+U)\times D\}\leq\inf\{a_n:n=1,2,\ldots\}=0.$$

因此,

$$\psi(-\varepsilon,0)\leq 0.$$

下证$\psi(-\varepsilon,0)\geq 0$. 若$t<0$, 则$t(b_0,d_0)\in-\mathrm{intcone}(B+U)\times\mathrm{int}D$. 由cone$(B+U)$, D是点锥得$(\mathrm{cone}(B+U)\times D)\cap(-(\mathrm{intcone}(B+U)\times\mathrm{int}D))=\varnothing$, 于是 $t(b_0,d_0)\notin\mathrm{cone}(B+U)\times D$. 因此, 若$t(b_0,d_0)\in\mathrm{cone}(B+U)\times D$, 则$t\geq 0$. 于是由(3.7)得$\psi(-\varepsilon,0)\geq 0$.

于是, $\psi(-\varepsilon,0)=0$. 因此(iii)成立.

(iv) 由U的吸收性和均衡性, 存在$\delta>0$使得$\delta b_0\in U=-U$. 于是对任意$b\in B$,

$$-b-\varepsilon=-\delta b_0-\varepsilon-(b-\delta b_0)\in-\delta b_0-\varepsilon-\mathrm{cone}(B+U).$$

另一方面, $-\delta d_0-\lambda_0 d_0\in-\delta d_0-D$. 因此

$$(-b-\varepsilon,-\delta d_0-\lambda_0 d_0)\in-\delta(b_0,d_0)+(-\varepsilon,0)-(\mathrm{cone}(B+U),D).$$

由泛函ψ的定义得

$$\psi(-b-\varepsilon,-\delta d_0-\lambda_0 d_0)\leq-\delta. \tag{3.8}$$

另外$(-b-\varepsilon,-\delta d_0-\lambda_0 d_0)=(-b-\lambda_0 b_0,-\delta d_0-\lambda_0 d_0)=(-b,-\delta d_0)-\lambda_0(b_0,d_0)$.

由引理2.2得

$$\psi(-b-\varepsilon,-\delta d_0-\lambda_0 d_0)=\psi(-b,-\delta d_0)-\lambda_0. \tag{3.9}$$

于是, 由(3.8)和(3.9)得

$$\psi(-b,-\delta d_0)\leq-\delta+\lambda_0,\ \forall b\in B.$$

因此(iv)成立.

推论3.1　设$\bar{x}\in A$. 若$\bar{x}$是($\varPhi$-SEPC)的一个Henig有效解, 则存在$Y\times Z$上正齐次次可加连续泛函ψ使得

(i) 若$y_1-y_2\in C\backslash\{0\}$, $z_1-z_2\in \mathrm{int}D$, 则$\psi(y_1,z_1)>\psi(y_2,z_2)$;

(ii) $\psi(y,z)\geq 0,\ \forall y\in\Phi(\bar{x},x),\ z\in G(x),\ x\in X_0$;

(iii) 存在$\delta>0$, $d_0\in\mathrm{int}D$使得$\psi(-b,-\delta d_0)\leq-\delta$, $\forall b\in B$.

证 在定理3.1中令$\varepsilon=0$, 则泛函ψ是正齐次次可加连续泛函且结论(i)-(iii)成立.

定理3.2 设$\varepsilon\in C$, B是C的基, $\bar{x}\in A$. 若存在$Y\times Z$上正齐次次可加连续泛函ψ满足

(i) 若$y_1-y_2\in\mathrm{int}C$, $z_1-z_2\in\mathrm{int}D$, 则$\psi(y_1,z_1)>\psi(y_2,z_2)$;

(ii) $\psi(y,z)\geq 0,\ \forall y\in\Phi(\bar{x},x),\ z\in G(x),\ x\in X_0$;

(iii) $\psi(-\varepsilon,0)=0$;

(iv) 存在$\delta>0$, $d_0\in\mathrm{int}D$使得$\psi(-b,-\delta d_0)\leq-\delta+\lambda_0$, $\forall b\in B$;

(v) $\psi(0,\delta d_0)+\frac{\lambda_0-\delta}{2}<0$.

则$\bar{x}$是(Φ-SEPC)的ε-Henig有效解.

证 由D是凸锥得

$$(1-\frac{1}{n})d+\frac{1}{n}d_0\in\mathrm{int}D+D=\mathrm{int}D,\ \forall d\in D,\ n\in\mathbb{N}^+.$$

取$y_0\in\mathrm{int}C$, 于是由ψ的正齐次性和(i)得

$$\psi(-\frac{1}{n}y_0,-((1-\frac{1}{n})d+\frac{1}{n}d_0))<\psi(0,0)=0. \tag{3.10}$$

由ψ的连续性, 对(3.10)式取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\psi(-\frac{1}{n}y_0,-((1-\frac{1}{n})d+\frac{1}{n}d_0))=\psi(0,-d)\leq 0. \tag{3.11}$$

类似可证$\psi(0,\delta d_0)\geq 0$, 再由(v)得$\lambda_0-\delta<0$.

令集合$V=\{y\in Y:|\ \psi(y,0)\ |<\frac{\delta-\lambda_0}{2}\}$, 则$V$是$Y$中的零邻域. 取一个零的均衡凸邻域$U\subset V$. 由$\psi$的次可加性, (iv), (v) 以及(3.11), 对任意的$b\in B$, $u\in U$和$d\in D$有

$$\begin{aligned}\psi(-b-u,-d)&\leq\psi(-b,-\delta d_0)+\psi(0,\delta d_0)+\psi(-u,0)+\psi(0,-d)\\&<-\delta+\lambda_0+\psi(0,\delta d_0)+\frac{\delta-\lambda_0}{2}\\&=\psi(0,\delta d_0)+\frac{\lambda_0-\delta}{2}\\&<0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

对于$(y,z)\in(-\mathrm{intcone}(B+U),-D)$, 由[13]中引理3.2得, 存在$\lambda_1>0$, $b_1\in B$, $u_1\in U$和$d_1\in D$使得

$$y=-\lambda_1(b_1+u_1),\ z=-d_1.$$

由D是锥, ψ的正齐次性以及(3.12)得

$$\psi(y,z)=\psi(-\lambda_1(b_1+u_1),-d_1)=\lambda_1\psi(-(b_1+u_1),-\frac{1}{\lambda_1}d_1)<0.$$

因此

$$\psi(-\mathrm{intcone}(B+U),-D)<0. \tag{3.13}$$

由ψ的次可加性, (iii)以及(3.13)得

$$\psi(-\varepsilon-\mathrm{intcone}(B+U),-D)\leq\psi(-\varepsilon,0)+\psi(-\mathrm{intcone}(B+U),-D)<0. \tag{3.14}$$

再由(ii)和(3.14)有

$$(\Phi(\bar{x},x),G(x))\cap(-\varepsilon-\mathrm{intcone}(B+U),-D)=\varnothing,\ \forall x\in X_0. \tag{3.15}$$

下证$\Phi(\bar{x},x)\cap(-\varepsilon-\mathrm{intcone}(B+U))=\varnothing$, $\forall x\in A$.

反证法, 假设存在$\hat{x} \in A$使得

$$\Phi(\bar{x}, \hat{x}) \cap (-\varepsilon - \text{intcone}(B+U)) \neq \varnothing. \tag{3.16}$$

由$\hat{x} \in A$有

$$G(\hat{x}) \cap (-D) \neq \varnothing. \tag{3.17}$$

由(3.16)和(3.17)得

$$(\Phi(\bar{x}, \hat{x}), G(\hat{x})) \cap (-\varepsilon - \text{intcone}(B+U), -D) \neq \varnothing,$$

这与(3.15)矛盾. 于是$\Phi(\bar{x}, x) \cap (-\varepsilon - \text{intcone}(B+U)) = \varnothing$, $\forall x \in A$.

因此, $\bar{x}$是(Φ-SEPC)的ε-Henig有效解.

推论3.2　设B是C的基, $\bar{x} \in A$. 若存在$Y \times Z$上正齐次次可加连续泛函ψ满足

(i) 若$y_1 - y_2 \in \text{int}C$, $z_1 - z_2 \in \text{int}D$, 则$\psi(y_1, z_1) > \psi(y_2, z_2)$;

(ii) $\psi(y, z) \geq 0$, $\forall y \in \Phi(\bar{x}, x)$, $z \in G(x)$, $x \in X_0$;

(iii) 存在$\delta > 0$, $d_0 \in \text{int}D$使得$\psi(-b, -\delta d_0) \leq -\delta$, $\forall b \in B$;

(iv) $\psi(0, \delta d_0) - \frac{\delta}{2} < 0$.

则$\bar{x}$是(Φ-SEPC)的Henig有效解.

证　由泛函ψ在$Y \times Z$上的正齐次次可加连续性得$\psi(0,0) = 0$. 在定理3.2中令$\varepsilon = 0$可以证得推论3.2成立.

在定理3.2中, 泛函ψ在$Y \times Z$上是正齐次次可加连续的. 接下来, 我们将减弱泛函ψ在$Y \times Z$上的性质得到下述定理.

定理3.3　设$\varepsilon \in C$, B是C的基, $\bar{x} \in A$. 若存在$Y \times Z$上泛函ψ满足

(i) 存在零的邻域$U_0 \subset V_B$, 若$y_1 - y_2 \in \text{intcone}(B + U_0)$, $z_1 - z_2 \in D$, 则$\psi(y_1, z_1) > \psi(y_2, z_2)$;

(ii) $\psi(y, z) \geq 0$, $\forall y \in \Phi(\bar{x}, x)$, $z \in G(x)$, $x \in X_0$;

(iii) $\psi(-\varepsilon, 0) = 0$.

则$\bar{x}$是(Φ-SEPC)的ε-Henig有效解.

证　取一个零的均衡凸邻域U_2使得$U_2 \subset V_B$. 令$U = U_0 \cap U_2$, 由(i)和(iii)得

$$\psi(-\varepsilon - \text{intcone}(B+U), -D) < \psi(-\varepsilon, 0) = 0. \tag{3.18}$$

再由(ii)和(3.18)有

$$(\Phi(\bar{x}, x), G(x)) \cap (-\varepsilon - \text{intcone}(B+U), -D) = \varnothing, \ \forall x \in X_0.$$

类似定理3.2的证明过程, 可以证得

$$\Phi(\bar{x}, x) \cap (-\varepsilon - \text{intcone}(B+U)) = \varnothing, \ \forall x \in A.$$

因此, $\bar{x}$是(Φ-SEPC)的ε-Henig有效解.

推论3.3　设B是C的基, $\bar{x} \in A$. 若存在$Y \times Z$上泛函ψ 满足

(i) 存在零的邻域$U_0 \subset V_B$, 若$y_1 - y_2 \in \text{intcone}(B + U_0)$, $z_1 - z_2 \in D$, 则$\psi(y_1, z_1) > \psi(y_2, z_2)$;

(ii) $\psi(y, z) \geq 0$, $\forall y \in \Phi(\bar{x}, x)$, $z \in G(x)$, $x \in X_0$;

(iii) $\psi(0, 0) = 0$.

则$\bar{x}$是(Φ-SEPC)的Henig有效解.

证　在定理3.3中令$\varepsilon = 0$可直接证得推论3.3成立.

4. 结论

本文中, 我们引进了带约束集值均衡问题近似Henig有效解的概念. 在没有任何凸性假设下, 利用非线性泛函建立了该解的必要和充分最优性条件(见定理3.1和3.2), 且该解的必要和

充分条件在形式上大致统一, 但在充分条件中要求泛函ψ在$Y \times Z$上是正齐次次可加连续的, 条件较强. 于是, 我们减弱泛函的性质建立了该解的另一充分最优性条件(见定理3.3). 最后, 我们在上述基础上建立了带约束集值均衡问题Henig有效解最优性条件.

参考文献:

[1] LONG X J, HUANG Y Q, PENG Z Y. Optimality conditions for the Henig efficient solution of vector equilibrium problems with constraints[J]. Optimization Letters, 2011, 5(4): 717-728.

[2] LUU D V, HANG D D. Efficient solutions and optimality conditions for vector equilibrium problems[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2014, 79(2): 163-177.

[3] LUU D V. Optimality condition for local efficient solutions of vector equilibrium problems via convexificators and applications[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2016, 171(2): 643-665.

[4] GONG X H. Efficiency and Henig efficiency for vector equilibrium problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 108(1): 139-154.

[5] GONG X H. Optimality conditions for vector equilibrium problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 342(2): 1455-1466.

[6] GONG X H. Scalarization and optimality conditions for vector equilibrium problems[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2010, 73(11): 3598-3612.

[7] GERTH C, WEIDNER P. Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1990, 67(2): 297-320.

[8] LI S J, YANG X Q, CHEN G Y. Nonconvex vector optimization of set-valued mappings[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 283(2): 337-350.

[9] ZHENG X Y. Scalarization of Henig proper efficient points in a normed space[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, 105(1): 233-247.

[10] QIU Q S, YANG X M. Some properties of approximate solutions for vector optimization problem with set-valued functions[J]. Journal of Global Optimization, 2010, 47(1): 1-12.

[11] QIU Q S, YANG X M. Scalarization of approximate solution for vector equilibrium problems[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2013, 9(1): 143-151.

[12] FU W T, CHENG Y M. On the strict efficiency in a locally convex space[J]. Systems Science and Mathematical Sciences, 1999, 12(1): 40-44.

[13] QIU J H, HAO Y. Scalarization of Henig properly efficient points in locally convex spaces[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2010, 147(1): 71-92.

Approximate Henig Efficient Solutions of Set-Valued Equilibrium Problems with Constraints

HU Shasha, XU Yihong, NIU Zhichao

(*Department of Mathematics, Nanchang University, Nanchang 330031, China*)

Abstract: In this paper, the concept of approximate Henig efficient solutions is introduced for set-valued equilibrium problems with constraints in locally convex Hausdorff topological vector spaces. By applying the nonlinear functional, necessary and sufficient optimality conditions for approximate Henig efficient solutions are established without any convexity assumption. In particular, another sufficient optimality condition is established by weakening the properties of functional.

Key words: Set-valued equilibrium problem; Approximate Henig efficient solution; Nonlinear scalarzation; Optimality condition